

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
«ТРУБЧЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

Утверждаю
Директор ГБПОУ «ТПТ»
_____ А.А. Ляпкин
«30» мая 2025 г.

**КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

**ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ 08.02.08 МОНТАЖ И ЭКСПЛУАТАЦИЯ ОБОРУДОВАНИЯ
И СИСТЕМ ГАЗОСНАБЖЕНИЯ**

Рассмотрен и одобрен на заседании ц/к
укрупненной группы специальностей 08.00.00
Техника и технологии строительства

Протокол № 9
от «23» мая 2025 г.

Председатель ц/к _____ Бурова Л.В.

Организация-разработчик:

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Трубчевский политехнический техникум»

Разработчик:

Амелькина А.Ф. - преподаватель ГБПОУ «ТПТ»

Ф.И.О., учёная степень, звание, должность

СОДЕРЖАНИЕ

- 1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**
- 2. РЕЗУЛЬТАТЫ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**
- 3. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
- 4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ
ДИСЦИПЛИНЫ**

1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

1.1. Общие положения

Контрольно-оценочные средств разработаны в соответствии с требованиями образовательной программы по специальности 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения и рабочей программы дисциплины

ЕН.01Математика

Контрольно-оценочные средства (далее - КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ЕН.01Теория вероятностей и математическая статистика. КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате оценки осуществляется проверка следующих объектов:

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01-06, ПК 1.1-1.3 ПК 2.1-2.5 ПК 3.1-3.6 ПК 4.1-4.3	Анализировать сложные функции и строить их графики; Выполнять действия над комплексными числами; Вычислять значения геометрических величин; Производить операции над матрицами и определителями; Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления; Решать системы линейных уравнений различными методами	Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры теории вероятностей и математической статистики; Основы интегрального и дифференциального исчисления; Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

3. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

3.1. Задания для оценки освоения темы 1.1 «Матрицы и определители» (Раздел 1 «Основы линейной алгебры»)

Практическое занятие №1

Тема: «Вычисление определителей высших порядков»

Цель: проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки, проверить умения нахождения миноров, алгебраических дополнений и определителей.

Теоретические сведения к практической работе

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} называются элементами определителя.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица размера } 3 \times 3$$

Соответствующим ей **определителем третьего порядка** называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Задания для практической работы

2. Вычислить определитель

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Определить x из уравнения

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

5. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & x \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -1 \\ b & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

11. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos(\alpha + \beta) \\ \cos \beta & \cos(\alpha + \beta) & 1 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$

Решить уравнения:

16. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

17. $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3.2. Задания для оценки освоения темы 1.2 «Системы линейных алгебраических уравнений» (Раздел 1 «Основы линейной алгебры»)

Практическое занятие №2(часть 1)

Тема: «Решение систем линейных уравнений по видам профессиональной деятельности»

Цель: сформировать умение исследовать и использовать метод Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений

Теоретические сведения к практической работе

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\dots,n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены i -го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$
 методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}. \text{ Далее вычисляем определители:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 - 4) - (-1)(12 + 6) - 1(-6 - 12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16 - 4) - (-1)(44 + 22) - 1(-22 - 44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44 + 22) - 4(12 + 6) - 1(33 - 33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44 + 22) - (-1)(33 - 33) + 4(-6 - 12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3$; $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$; $x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$. Для

проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Содержание практической работы

Задание 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

Задание 2. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

$$1) (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

$$2) (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array} \right)$$

$$3) (A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$4) (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

Задание 3. Решить СЛАУ *методом Крамера*

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

Практическое занятие №2(часть 2)

Тема: «Решение систем линейных уравнений по видам профессиональной деятельности»

Цель: сформировать умение исследовать и использовать метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений

Теоретические сведения к практической работе

Алгоритм метода Гаусса.

Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. Прямой ход. Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. Обратный ход. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 1. Решить СЛАУ
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 + 4C_1 \\ C_3 = C_3 - 2C_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг

равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 - 11C_3 \\ C_1 = C_1 - 2C_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{C_1 = C_1 - C_2 / 6 \\ C_2 = -C_2 / 6}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения

неизвестных в порядке их номеров: $X = (3; 1; 1)^T$. Это и есть ответ.

Содержание практической работы

Задание 1. Решить СЛАУ *методом Гаусса*

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

3.3. Задания для оценки освоения темы 2.1 «Дифференциальное исчисление» (Раздел 2 «Основы математического анализа»)

Практическое занятие №3(часть 1)

Тема: «Дифференцирование сложных функций»

Цель: активизировать и закрепить умение находить производные элементарных функций, формировать умение вычислять производные сложных функций (2-3 вложения с действиями)

Теоретические сведения к практической работе

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x) —$ дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x) —$ дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)], \quad y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y) —$ взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

$1. C' = 0$ $2. x' = 1$ $3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $4. (a^x)' = a^x \ln a$ $5. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$ $6. (e^x)' = e^x$	$11. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $12. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$ $9. (\sin x)' = \cos x$ $10. (\cos x)' = -\sin x$
---	---	---

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}$; б) $s = (e^t - 2 \ln t) \sin t$; в) $u = \operatorname{ctg}^3 \frac{v}{3}$; г) $z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$\begin{aligned}
 y' &= (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = \\
 &= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.
 \end{aligned}$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t , т. е. $t=1$, получим: □

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)' \sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)') \sin t + (e^t - 2\ln t) \cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right) \sin t + (e^t - 2\ln t) \cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v , т. е. $v=1$; □ используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)^2 \right]' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(-\frac{\left(\frac{v}{3} \right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = -\frac{2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{3 \sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t=1$, получим: □

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1 + 4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1 + 4t^2)'}{(1 + 4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1 + 4t^2} (1 + 4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0 + 4 \cdot 2t)}{(1 + 4t^2)^2} = \frac{2 - 8t \operatorname{arctg} 2t}{(1 + 4t^2)^2}.$$

Содержание практической работы:

Задание 1.

Найти производные 1-го порядка данных функций:

1 вар. а) $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; б) $s = (1 + t^2)(2 - 3 \operatorname{arctg} t)$; в) $u = \ln^3 \frac{V}{2}$; г) $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$.

2 вар. а) $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; б) $s = (4 - 3 \ln t)(5 + 2 \sin t)$; в) $u = \sin^4(2V + 3)$; г) $z = \frac{\sin(2 - t)}{2 - \ln 3t}$.

Задание 2.

Найти производные сложных функций:

Вариант 1	Вариант 2
а) $y = (3x + 1)^4$; б) $y = \sqrt{\ln x + 2}$; в) $y = \ln(\cos 4x)$; г) $y = e^{x^2 - 8x + 3} + t g \frac{\pi}{5}$; д) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$; е) $y = \arccos^3 x$.	а) $y = (1 + 2x)^9$; б) $y = \sqrt{tg x + 2}$; в) $y = \ln(x^3 + x)$; г) $y = 7^{\sqrt{x}} + t g 3$; д) $y = \frac{1 + e^{\cos x}}{1 - e^{\cos x}}$; е) $y = \operatorname{arctg} x^2$.

Практическое занятие №3(часть 2)

Тема: «Дифференцирование сложных функций»

Цель: активизировать и закрепить умение находить производные элементарных функций, формировать умение вычислять производные сложных функций (2-3 вложения с действиями)

Теоретические сведения к практической работе

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)], \quad y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

$1. C' = 0$	$11. (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$2. x' = 1$	$12. (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$4. (a^x)' = a^x \ln a$	$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$5. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$	$15. (arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$6. (e^x)' = e^x$	$16. (arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$9. (\sin x)' = \cos x$
		$10. (\cos x)' = -\sin x$

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}$; **б)** $s = (e^t - 2 \ln t) \sin t$; **в)** $u = ctg^3 \frac{v}{3}$; **г)** $z = \frac{\arctg 2t}{1 + 4t^2}.$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = \\ = 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t , т. е. $t=1$, получим: □

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)' \sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' = \\ ((e^t)' - 2(\ln t)') \sin t + (e^t - 2\ln t) \cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right) \sin t + (e^t - 2\ln t) \cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v , т. е. $v=1$; □ используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3}\right)^2\right]' = 2\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}}\right) = \\ = 2\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{3\sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t=1$, получим: □

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} = \\ = \frac{(2t)'(1+4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0+4 \cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t \operatorname{arctg} 2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Содержание практической работы:

Найти производные сложных функций:

Вариант 1	Вариант 2
<p>а) $y = (3 - 5x)^4$; б) $y = \sqrt{\sin x - 5}$; в) $y = \ln(x^4 + 4x)$; г) $y = e^{\cos x} + \ln 5$; д) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$; е) $y = \operatorname{arctg} 5x$.</p>	<p>а) $y = (5 - 3x)^8$; б) $y = \sqrt{\cos 3x + 1}$; в) $y = \ln(\sin 2x)$; г) $y = 4^{x^8} + \ln \pi$; д) $y = \frac{1 - \ln(\sin x)}{1 - \ln(\sin x)}$; е) $y = \arccos x^2$.</p>
Вариант 3	Вариант 4
<p>а) $y = (2 + 3x)^6$; б) $y = \sqrt{2 - \ln x}$; в) $y = \ln(x^3 + x)$; г) $y = e^{x^8 - 5x + 1} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}$; д) $y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$; е) $y = \arcsin \sqrt{x}$.</p>	<p>а) $y = (5x - 3)^7$; б) $y = \sqrt{e^x + 1}$; в) $y = \ln(\cos 4x)$; г) $y = 7^{x^8 + x} + \ln 3$; д) $y = \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}$; е) $y = \operatorname{arctg} 3x$.</p>

Вариант 5	Вариант 6
а) $y = (5 + 9x)^5$; б) $y = \sqrt{tgx - 5}$; в) $y = \ln(x^2 - 5x)$; г) $y = e^{\cos x} + \sqrt{3}$; д) $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$; е) $y = \arctg 2x$.	а) $y = (1 + 3x)^9$; б) $y = \sqrt{\cos 4x - 1}$; в) $y = \ln(\sin 8x)$; г) $y = 4^{x^2} + \ln 8$; д) $y = \frac{1 - \ln(\cos x)}{1 + \ln(\cos x)}$; е) $y = \arccos x^3$.

Практическое занятие №4 (часть 1)

Тема: «Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциала»

Цель: сформировать навыки аналитической исследовательской работы по приложению производной.

Теоретические сведения к практической работе

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad (y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \quad c = \text{const}, \quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $C' = 0$	11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
2. $x' = 1$	12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
4. $(a^x)' = a^x \ln a$	14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(e^x)' = e^x$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	9. $(\sin x)' = \cos x$
		10. $(\cos x)' = -\sin x$

Содержание практической работы:

Вариант 1

1. Найти производную функции $y = \sin^6(4x^3 - 2)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 1$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Найти производную функции $y = \cos^4(6x^2 + 9)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 2x^5 - \sin 3x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 2$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 3

1. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^5(3x^4 - 13)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^3 - e^{5x}$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Практическое занятие №4 (часть 2)

Тема: «Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциала»

Цель: сформировать навыки аналитической исследовательской работы по приложению производной.

Теоретические сведения к практической работе

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)], \quad y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

$1. C' = 0$	$11. (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$2. x' = 1$	$12. (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$4. (a^x)' = a^x \ln a$	$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$5. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$	$15. (arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$6. (e^x)' = e^x$	$16. (arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$9. (\sin x)' = \cos x$
		$10. (\cos x)' = -\sin x$

Содержание практической работы:

Вариант 1

1. Найти производную функции $y = ctg^4(5x^3 + 6)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 5x^4 - \cos 4x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1, x_0 = 2$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Найти производную функции $y = \arcsin^3 7x^2$.

2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^4 + \sin 2x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 8$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 3

1. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}^6 5x^4$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 6x^5 + e^{4x}$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

3.4. Задания для оценки освоения темы 2.2 «Интегральное исчисление» (Раздел 2 «Основы математического анализа»)

Практическое занятие №5

Тема: «Интегрирование функций»

Цель: на конкретных примерах научиться находить определенный интеграл различными способами.

Теоретические сведения к практической работе

Метод непосредственного интегрирования

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int \operatorname{tg} x dx = \ln \cos x + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x dx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x dx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_b^a f(x) dx$ от непрерывной

функции $f(x)$. Если будет определена (найдена) первообразная функция $F(x)$ подынтегральной функции, то величина определенного интеграла вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. Непосредственное интегрирование

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi/2} (2 \cos x - 3 \sin x) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2 \cos x - 3 \sin x) dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx - 3 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [2 \sin x + 3 \cos x]_0^{\pi/2} = \\ &= \left(2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2} \right) - (2 \sin 0 + 3 \cos 0) = 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

2. Метод подстановки (замена переменной под знаком определенного интеграла)

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} &= \left(\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; x=0; t = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = \operatorname{tg} 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2}, t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right) = \\ &= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{2t}{1+t^2} \right)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+2t+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = 2 \int_0^1 (1+t)^{-2} dt = 2 \frac{(1+t)^{-2+1}}{-2+1} \Big|_0^1 = \\ &= 2 \frac{(1+t)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = -\frac{2}{1+t} \Big|_0^1 = -\left(\frac{2}{2} - \frac{2}{1} \right) = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Ответ. 1.

Содержание практической работы:

№ 1

I-вариант Вычислите интеграл:	II-вариант 1. Вычислите интеграл:
1) $\int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx$; 2) $\int_4^9 x^{-\frac{1}{2}} dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-16dx}{\sin^2 x}$;	1) $\int_1^3 x^{-2} dx$; 2) $\int_0^1 x^4 dx$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 4) $\int_0^{\pi} \frac{-9dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int_{-1}^1 2e^x dx$.

<p>5) $\int_0^4 0,5e^x dx$.</p> <p>2. Вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями:</p> <p>1)</p> <p>$y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3, \quad y = x^2$</p> <p>2)</p> <p>$y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = x^3$</p>	<p>2. Вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями:</p> <p>1)</p> <p>$y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = x^2 - 1$</p> <p>;</p> <p>2)</p> <p>$y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = x^3 + 2$</p> <p>.</p>
---	--

№2

Вычислить определённые интегралы, используя метод замены переменной и интегрирование по частям:

а) $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ в) $\int_1^e \ln x dx$ г) $\int_0^\pi x \sin x dx$

Практическое занятие №6

Тема: «Решение прикладных задач с помощью интеграла»

Цель: отработать умение вычислять определённые интегралы и применять полученные компетенции при решении задач прикладного характера.

Теоретические сведения к практической работе

№ п/п	Физическая величина	Формула	Единицы измерения
1	Путь, пройденный точкой с переменной скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	$t_1, t_2 - c$; $v(t) - м/с$; $S - м$.
2	Работа переменной силы $f(x)$ на пути от точки а до точки b	$A = \int_a^b f(x) dx$	$f(x) - Н$; $a; b - м$; $A - Дж$.
3	Сила давления жидкости на вертикальную пластину	$P = g \int_a^b p x f(x) dx$	$g = 9,8 м/с^2$; $p - кг/м^3$; $a; b - м$; $p - Н$.

1. Задача о вычислении пути

Пример 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \quad (1)$$

Решение:

1. $t_1=0\text{с}; t_2 = 5\text{с}.$

2. По формуле (1) найдем путь, пройденный телом за 5 сек.

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 =150(\text{м}).$$

Ответ. $S=150\text{ м}.$

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1=(6t^2+2t)\text{м/с}$, второе – со скоростью $v_2=(4t+5)\text{м/с}$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1=\int_0^5 (6t^2+2t)dt = (2t^3+t^2)\Big|_0^5 =275(\text{м})$$

$$S_2=\int_0^5 (4t+5)dt = (2t^2+5t)\Big|_0^5 =75(\text{м})$$

Таким образом, $S= S_1 - S_2 =275-75=200(\text{м}).$

2.Задача о вычислении работы переменной силы.

Работа A этой силы F вычисляется по формуле:

$$A=F*s, \tag{2}$$

Где S – перемещение, м.

Если F – сила упругости, то по закону Гука

$$F=kx, \tag{2*}$$

где x - величина растяжения или сжатия,

k – коэффициент пропорциональности.

Работа переменной силы вычисляется по формуле (4)

$$A=\int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Пример. Сила упругости F пружины, растянутой на $l_1 =0,05\text{м}$, равна 3Н . Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $l_2 = 0,1\text{м}$?

Решение:

1. Определим коэффициент пропорциональности k .

Подставим в формулу (2*) $F=3\text{ Н}$, $x = 0,05\text{ м}$:

$3=k*0,05$, т.е. $k=60$, следовательно, $F=60x=f(x)$.

2. Подставив $F=60x$ в формулу (3), найдем значение работы переменной силы, полагая, что $a=0$; $b=0,1$:

$$A=\int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2\Big|_0^{0,1} =0,3\text{Дж}$$

Ответ. $A = 0,3\text{Дж}.$

3. Задача о силе давления жидкости.

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P=gphS, \tag{4}$$

Где g – ускорение свободного падения в м/с^2 ;

ρ – плотность жидкости в кг/м^3 ;

h – глубина погружения площадки в м ;

S – площадь площадки в м^2 ;

Сила давления жидкости на вертикальную пластину вычисляется по формуле (5)

$$P = g \int_a^b \rho x f(x) dx. \quad (5)$$

Пример.

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой $0,4 \text{ м} \times 0,7 \text{ м}$.

Решение:

1. Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x) = 0.7x$, где $x \in [0; 0.4]$, поэтому пределы интегрирования $a=0$ и $b=0.4$.

2. Для нахождения силы давления воды на стену воспользуемся формулой (5).

$$P = g \int_0^{0.4} 1000 * 0.7 * x dx = 700 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0.4} = 56g \approx 549 \text{ Н}$$

$g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ускорение свободного падения.

Содержание практической работы

Вариант 1 (2).

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 9t^2 - 2t - 8$ (м/с).

Найти путь, пройденный телом за 3 (4) секунды от начала движения.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (2t^2 + 4t)$ м/с, второе – со скоростью $v_2 = (3t + 2)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 (12) с?

3. Сила упругости F пружины, растянутой на $l_1 = 0.02$ (0.05) м, равна 2 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $l_2 = 0.05$ (0.1) м?

Практическое занятие №7

Тема: «Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной»

Цель: на конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл методом замены переменной.

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C$, то $\int f(x) dx = F(\psi(x)) + C$, где $\psi(x)$ —

функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

- 1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.
- 2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а) $\int \cos 4x dx$; б) $\int e^{9x+1} dx$; в) $\int x(2-x^2)^5 dx$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \cos 4x dx &= \left| \begin{array}{l} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int e^{9x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int x(2-x^2)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2-x^2)^6 + C. \end{aligned}$$

Задания для практической работы:

Вычислить неопределенные интегралы методом замены переменной:

$$1) \int \frac{dx}{\sin^2 3x} \qquad \int \frac{x dx}{\sqrt{2+x^2}} \qquad \int e^{1-3x} dx$$

$$\begin{array}{lll}
2) \int (2x-1)\cos(x^2-x)dx & \int x\sqrt{5+x^2}dx & \int e^{6x+5}dx \\
3) \int 10^{2x+1}dx & \int \sin \frac{x}{2}dx & \int \frac{dx}{5x+3} \\
4) \int x^2(3-x^3)^{10}dx & \int \cos 2x dx & \int e^{\sin x} \cos x dx \\
5) \int \frac{dx}{x \ln x} & \int \sin 2x dx & \int 3^{7x-1} dx \\
6) \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} & \int \sin(2-3x)dx & \int \frac{dx}{e^{3x}}
\end{array}$$

Ответы

$$\begin{array}{l}
1. \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + C. \quad 2. \frac{2}{3} \sqrt{(x+4)^3} - 8 \sqrt{x+4} + C. \\
3. -\frac{1}{3} \sqrt{1+6\cos x} + C. \quad 4. \frac{\sin^4 x}{4} + C. \quad 5. \frac{1}{\cos x} + C. \quad 6. \frac{1}{3} e^{x^3} + C. \\
7. -\frac{1}{5} \ln |4-5x| + C. \quad 8. \ln(\ln x) + C. \quad 9. \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C. \quad \text{Под-} \\
\text{становка } \cos x = t. \quad 10. \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad 11. -\sqrt{1-x^2} + C.
\end{array}$$

3.5. Задания для оценки освоения темы 2.3 «Дифференциальные уравнения» (Раздел 2 «Основы математического анализа»)

Практическое занятие №8 (часть 1)

Тема: «Решение дифференциальных уравнений по видам профессиональной деятельности»

Цель: на конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, а также линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y) \text{ или } X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y \quad dx = \frac{\ln y dy}{y} \quad \int dx = \int \frac{\ln y dy}{y} \quad x + C = \int \ln y d(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2} - \text{общее решение}$$

$$\text{при } y(2) = 1 \text{ получаем } 2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \Rightarrow 2 + C = 0; \Rightarrow C = -2;$$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y$; или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Пример2. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx;$$

$$\arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Определение. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ где } p \text{ и } q - \text{ постоянные величины.}$$

Для отыскания общего решения данного уравнения составляется соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0$$

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант	D>0	D=0	D<0
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx} (c_1 + c_2 x)$	$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Тогда общее решение дифференциального уравнения записывается в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения и его корней.

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_1 = k_2 = 2$.

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i$;
 $k_2 = -1 - 2i$.

Общее решение: $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Задания для практической работы:

I вариант:	II вариант:	III вариант:
-------------------	--------------------	---------------------

1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:		
$x^2 y' - 2xy = 3$ $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$	$y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = \operatorname{ctgx}$ $y = \sin x - 1$	$xy' + 2y = e^{x^2}$ $y = 3 - e^{-x^2}$
2. Решите уравнение с разделяющимися переменными		
$y' = 1 + x$	$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$	$ydy - (1 + 2x)dx = 0$
3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию		
$(1 + x^3)y' = 3x^2 y$ $y(0) = 2$	$2\sqrt{y}dx - dy = 0$ $y(0) = 1$	$y' + y \sin 2x = 0$ $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

Практическое занятие №8 (часть 2)

Тема: «Решение дифференциальных уравнений по видам профессиональной деятельности»

Цель: на конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, а также линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y) \text{ или } X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

Пример1. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y \quad dx = \frac{\ln y dy}{y} \quad \int dx = \int \frac{\ln y dy}{y} \quad x + C = \int \ln y d(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2} - \text{общее решение}$$

при $y(2) = 1$ получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}$; $\Rightarrow 2 + C = 0$; $\Rightarrow C = -2$;

Итого: $2(x - 2) = \ln^2 y$; или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Пример2. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx;$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C \right);$$

Определение. **Линейным однородным дифференциальным уравнением второго**

порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ где } p \text{ и } q - \text{ постоянные величины.}$$

Для отыскания общего решения данного уравнения составляется соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0$$

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx} (c_1 + c_2 x)$	$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Тогда общее решение дифференциального уравнения записывается в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения и его корней.

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_1 = k_2 = 2$.

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i$;
 $k_2 = -1 - 2i$.

Общее решение: $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Задания для практической работы:

Решить уравнения:	Найдите частные решения уравнений:
1) $y'' - 5y' + 4y = 0$	1) $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y=2$ и $y' = 8$ при $x=0$
2) $y'' - y = 0$	2) $y'' + 6y' + 9y = 0$; $y=1$ и $y' = 2$ при $x=0$
3) $y'' - 7y' + 12y = 0$	3) $y'' - 9y = 0$; $y=2$ и $y' = 6$ при $x=0$

4) $y'' - 4y' + 5y = 0$	
-------------------------	--

3.6. Задания для оценки освоения темы 2.4 «Ряды» (Раздел 2 «Основы математического анализа»)

Самостоятельная работа по теме:

«Вычисление суммы ряда и исследование сходимости ряда, разложение функции в ряд в области профессиональной деятельности»

Задание 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{3n^2 + 2n + 1}$.

Задание 2. Рассмотрим ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$.

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n + \dots \quad (a \neq 0).$$

Задание 3. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in R.$$

Задание 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \dots$$

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$.

Задание 6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots$$

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$.

3.7. Задания для оценки освоения темы 3.1 «Основные свойства комплексных чисел» (Раздел 3 «Основы теории комплексных чисел»)

Практическое занятие №9

Тема: «Действия над комплексными числами в различных формах записи»

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами, представленными в различных формах записи

Теоретические сведения к практической работе

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где x, y – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Первое из вещественных чисел, x , называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, y , – *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль, а $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа.

Пусть по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r \cos \varphi, \\ b = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Отсюда получается $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Показательная форма комплексного числа

где $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам действий со степенями:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше

нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Пример 2. Вычислить $z = \frac{2-7i}{3+4i}$

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

Пример 3. Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2}, \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Пример 4. Представить в показательной форме комплексное число:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i.$$

△ Находим модуль числа

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}.$$

и один из его аргументов

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

(так как z находится в четвертой четверти). Следовательно,

$$z = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{6}}. \quad \blacktriangle$$

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить действия с комплексными числами, представленными в алгебраической форме:

$$\begin{array}{lll} 1) (2-3i)-(1+i)(2i-1) & 2) \frac{2+3i}{1-i} & 3) 6i + \frac{1+7i}{2-3i} \\ 4) (3+i)\frac{1+i}{1-i} & 5) \frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}} & 6) (1-i)^2 + i^4 \end{array}$$

Задание 2. Найти все корни уравнений:

$$\begin{array}{llll} 1) x^2 + 9 = 0; & 2) x^2 - 3x + 10 = 0; & 3) x^2 - 2x + 10 = 0; & 4) \\ x^2 + 2x + 10 = 0; & 5) x^4 - 16 = 0 & 6) x^2 + 100 = 0 \end{array}$$

Задание 3. Выполнить действия над комплексными числами и представить результат в тригонометрической и показательной формах:

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $z_1 * z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$;

1. $z_1 = 1 + i, z_2 = -\sqrt{3} + i$;

2. $z_1 = 1 - i, z_2 = -\sqrt{3} - i$;

3.8. Задания для оценки освоения темы 3.2 «Некоторые приложения теории комплексных чисел» (Раздел 3 «Основы теории комплексных чисел»)

Самостоятельная работа по теме:

«Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Решение смешанных задач. Решение задач с комплексными числами в области профессиональной деятельности»

1 вариант

1. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:

$$z_1 = 3 - 7i, \quad z_2 = 2 - i.$$

$$z_1 = 2 + 6i, \quad z_2 = -2 + i.$$

$$z_1 = 4 + 2i, \quad z_2 = -2 - i.$$

2. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

а) $x^2 + 8 = 0$.

б) $x^2 - 2x + 2 = 0$

3. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$\frac{-7+6i}{-4-5i} - \frac{-1-7i}{1-8i} + \frac{1-2i}{1-8i}$$

2 вариант

1. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:

$$z_1 = 5 + 3i, \quad z_2 = 3 + i.$$

$$z_1 = 6 - 2i, \quad z_2 = 3 - i.$$

$$z_1 = 7 + 9i, \quad z_2 = -3 + i$$

2. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

а) $x^2 + 9 = 0$.

б) $3x^2 - x + 1 = 0$

3. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$\frac{1+5i}{1-6i} + \frac{-6+7i}{2+5i} - \frac{-6-8i}{-6-8i}$$

Практическое занятие №10 (часть 1)

Тема: «Применение комплексных чисел при решении задач по видам профессиональной деятельности»

Цель: получить и систематизировать информацию по применению комплексных чисел

при решении задач по видам профессиональной деятельности в различных отраслях жизнедеятельности людей.

План выполнения н/р №10:

- Рассмотреть формы представления комплексного числа;
- Проанализировать действия над комплексными числами;
- Привести примеры решения уравнений в комплексных числах;

Практическое занятие №10 (часть 2)

Тема: «Применение комплексных чисел при решении задач по видам профессиональной деятельности»

Цель: получить и систематизировать информацию по применению комплексных чисел при решении задач по видам профессиональной деятельности в различных отраслях жизнедеятельности людей.

План выполнения н/р №10:

- Дать краткую характеристику применения комплексных чисел в экономике;
- Рассмотреть и привести примеры применения комплексных чисел в физических задачах;
- Проанализировать перспективы применения комплексных чисел.

3.9. Задания для оценки освоения Раздела 4 «Основы теории вероятностей и математической статистики»

Самостоятельная работа по теме:

«Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное случайной величины».

Задание 1.

Найти дисперсию выборки:

- 1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

Задание 2.

Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X , заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	-1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

Задание 3.

Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:

1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

Задание 4.

Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:

1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;

2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

Задание 5.

Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения:

1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9;

2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

Практическое занятие №11

Тема: «Решение простейших задач теории вероятностей и математической статистики»

Цель: отработать умение решать задачи на вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики, на вычисление основных числовых характеристик ДСВ с целью развития логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Теоретические сведения к практической работе:

ПЕРЕСТАНОВКИ

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$P_n = n! \quad (1)$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

СОЧЕТАНИЯ

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Определение. Вероятностью $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m , благоприятствующих событию A , к числу n всех исходов испытания.

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leq n.$$

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

а также

$$P(V) = 0, P(U) = 1,$$

где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Определение. События A и B называют независимыми, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1)$$

Задания для практической работы

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$, $P(AB) = 0,1$;

2) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(AB) = \frac{2}{9}$.

Задача 2. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 3 шара, найти вероятность того, что они будут:
а) все белыми, б) все одного цвета; в) ровно два черных.

Задача 3 За офисом наблюдают две независимые друг от друга видеокамеры. Вероятность того, что в течение суток первая видеокамера выйдет из строя, равна 0,001, а вероятность того, что выйдет из строя вторая, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

Задание 5. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:

1) -5, -15, 12, -7, 8, 13, -1, -7;

2) 16, -2, -8, 10, 14, -6, -2, 11.

3.10. Задания для оценки освоения курса учебной дисциплины ЕН.01 МАТЕМАТИКА (08.02.08)

- **Форма/вид промежуточной аттестации**

Формой промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом является: дифференцированный зачет

- **Форма проведения промежуточной аттестации**

Письменная контрольная работа.

- **Срок проведения**

Дисциплина в соответствии с учебным планом по специальности изучается на протяжении одного семестра. Промежуточная аттестация проводится в конце семестра.

Проверяемые знания и умения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *уметь*:
У1. Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *знать*:

31. Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении образовательной программы СПО;

32. Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

33. Основные понятия и методы математического анализа;

34. Основы теории вероятностей и математической статистики;

35. Основные понятия и методы дискретной математики, линейной алгебры.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (дифференцированный зачет)

Вариант 1

1. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$

2. Найдите производную функции $y = (3x + 1)^4$

3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, вычислите определённый интеграл:

$$\int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx$$

4. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x} dx$$

5. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

6. Решить уравнение: $x^2 - 6x + 18 = 0$

7. Найти дисперсию выборки: 10 см, 12 см, 7 см, 11 см

Вариант 2

1. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

2. Найдите производную функции $y = (1 + 2x)^9$

3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, вычислите определённый интеграл:

$$\int_1^3 x^{-2} dx$$

4. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 7x + 12}{x} dx$$

5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

6. Решить уравнение: $x^2 - 2x + 10 = 0$

7. Найти дисперсию выборки: 16 г, 14 г, 13 г, 17 г

Эталоны ответов

**к итоговой контрольной работе в рамках дифференцированного зачета
по учебной дисциплине ЕН.01 МАТЕМАТИКА для специальности**

08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения

1 вариант

№ задания	Эталон ответа
1	0,1
2	$12(3x + 1)^3$

3	$65/324$
4	$3\ln x + 2x - 0,5x^2 + c$
5	8
6	$3+3i; 3-3i$
7	3,5

2 вариант

№ задания	Эталон ответа
1	$2\frac{2}{3}$
2	$18(1 + 2x)^8$
3	$\frac{2}{3}$
4	$0,5x^2 - 7x + 12\ln x + c$
5	0
6	$1+3i; 1-3i$
7	2,5

4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Критерии оценки дифференцированного зачета	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
Отсутствие ошибок в работе, корректность оформления и вычислений. Работа выполнена в полном объеме. Без дополнительных пояснений (указаний) используются навыки и умения. Все материалы оформлены аккуратно и согласно указанным требованиям. Даются грамотные ответы на поставленные вопросы.	5	отлично
Работа выполнена в полном объеме. Навыки и умения, полученные при изучении дисциплины, не могут быть использованы без дополнительных пояснений. При оформлении работы допущены несущественные ошибки в расчетах (ошибки при округлении чисел и	4	хорошо

т.п.).		
Работа выполнена в полном объеме, но содержит грубые ошибки, что повлекло неверные вычисления всех других параметров. Навыки и умения, полученные при изучении дисциплины, не могут быть использованы без длительных дополнительных пояснений. Показаны ограниченные знания предмета при ответе на вопросы.	3	удовлетворительно
Работа содержит принципиальные ошибки (перепутаны формулы, нарушена последовательность выполнения вычислений и т.п.). Отсутствуют базовые школьные знания. Работа оформлена крайне небрежно. Показывается незнание предмета при ответе на вопросы.	2	неудовлетворительно

Информационные источники для разработки комплекта КОС по учебной дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

(специальность 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения)

Основные источники

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Задачник, издательский центр "Академия", 2021
2. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начало математического анализа. Геометрия. Учебник, издательский центр "Академия", 2021
3. Баврин И.И. «Математический анализ. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2023.
4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике; учебное пособие по математике для средних специальных учебных заведений.- М. Высшая школа, 2021.
5. Ивашев-Мусатов О.С. «Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2023.
6. Каченовский М.И. и др. (под ред.Г.Н. Яковлева) Алгебра (в 2 частях). М.- Наука, 2021
7. Каченовский М.И. и др. (под ред.Г.Н. Яковлева) Геометрия. М.- Наука, 2021
8. Татарников О.В. Элементы линейной алгебры. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2023.
9. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для СПО. М. - Юрайт, 2022.

Дополнительные источники

1. Алимов Ш.А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. М., 2022.

2. Башмаков М.И. Математика: кн. для преподавателя: метод, пособие. М., 2022.

3. Башмаков М.И., Цыганов Ш.И. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ. М., 2021

4. Раздаточный материал для работы на уроке по всем темам курса

5. Мультимедийное обеспечение теоретического материала: презентации, электронные плакаты

6. Контролирующие материалы по дисциплине

Электронные издания (электронные ресурсы)

www.fcior.edu.ru.

www.school-collection.edu.ru

<https://urait.ru/>

<http://multiurok.ru>

