

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ТРУБЧЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

Утверждаю  
Директор ГБПОУ «ТПТ»  
\_\_\_\_\_ А.А. Ляпкин  
« 30 » мая 2025 г.

**КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**ОД.03 МАТЕМАТИКА**

**ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ 08.02.08 МОНТАЖ И ЭКСПЛУАТАЦИЯ  
ОБОРУДОВАНИЯ И СИСТЕМ ГАЗОСНАБЖЕНИЯ**

Рассмотрен и одобрен на заседании  
ц/к ООД  
Протокол № 10  
от «29 » мая 2025г.  
Председатель ц/к \_\_\_\_\_ Зятков В.И.

Трубчевск 2025

Комплект контрольно-оценочных средств разработан на основе  
Федеральных государственных образовательных стандартов среднего общего  
образования (далее ФГОС СОО) и среднего профессионального образования  
(далее – ФГОС СПО) по специальности

**08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения**

Организация-разработчик:

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
«Трубчевский политехнический техникум»

Разработчик:

Амелькина А.Ф. - преподаватель ГБПОУ «ТПТ»

Ф.И.О., учёная степень, звание, должность

## **СОДЕРЖАНИЕ**

- 1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ  
СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**
- 2. РЕЗУЛЬТАТЫ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**
- 3. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
- 4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ  
ДИСЦИПЛИНЫ**

# 1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

## ОД.03 МАТЕМАТИКА

### 1.1. Общие положения

Контрольно-оценочные средства разработаны в соответствии с требованиями образовательной программы по специальности 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения и рабочей программы дисциплины ОД.03 Математика.

Контрольно-оценочные средства (далее - КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ОД.03 Математика. КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате оценки осуществляется проверка следующих объектов:

Код ПК, ОК	Знания	Умения
ОК 01-08, ПК 1.1 ПК 2.1 ПК 3.1-3.2 ПК 4.1-4.2 ПК 5.1-5.3 ПК 6.1-6.3 ПК 7.1-7.2	Базовые знания и умения по математике в профессиональной и в повседневной деятельности. Действия над положительными и отрицательными числами, обыкновенными и десятичными дробями. Действия со степенями, формулы сокращенного умножения. Предмет стереометрии. Основные понятия (точка, прямая, плоскость, пространство). Основные аксиомы стереометрии. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Признак и свойство скрещивающихся прямых. Основные пространственные фигуры. Параллельные прямая и плоскость. Определение. Признак. Свойства (с доказательством). Параллельные плоскости. Определение. Признак. Свойства (с доказательством). Тетраэдр и его элементы. Параллелепипед и его элементы. Свойства противоположных граней и диагоналей параллелепипеда. Построение сечений. Перпендикулярные прямые. Параллельные	Виды плоских фигур и их площадь. Простые проценты, разные способы их вычисления. Сложные проценты. Линейные, квадратные, дробно-линейные уравнения и неравенства. Способы решения систем линейных уравнений. Понятия: матрица $2 \times 2$ и $3 \times 3$ , определитель матрицы. Метод Гаусса. Системы нелинейных уравнений. Системы неравенств.  Аксиомы стереометрии. Перпендикулярность прямой и плоскости, параллельность двух прямых, перпендикулярных плоскости, перпендикулярность



	<p>прямые, перпендикулярные к плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Доказательство. Перпендикуляр и наклонная. Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности плоскостей. Доказательство.</p> <p>Расстояния в пространстве. Теорема о трех перпендикулярах. Доказательство. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями. Декартовы координаты в пространстве. Простейшие задачи в координатах. Расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка. Векторы в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Компланарные векторы. Скалярное произведение векторов. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Координаты вектора, скалярное произведение векторов в координатах, угол между векторами, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями. Уравнение плоскости. Геометрический смысл определителя <math>2 \times 2</math>. Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла. Тригонометрические тождества. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов <math>\alpha</math> и <math>-\alpha</math>. Формулы приведения. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов. Синус и косинус двойного угла. Формулы половинного угла. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразования простейших тригонометрических выражений. Область определения и множество значений функций. Чётность, нечётность, периодичность функций. Способы задания функций. Область определения и множество значений</p>	<p>плоскостей.</p> <p>Расположение прямых и плоскостей в пространстве. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Координатная плоскость. Вычисление расстояний и площадей на плоскости. Количественные расчеты. Декартовы координаты в пространстве. Векторы в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Компланарные векторы. Скалярное произведение векторов. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Простейшие задачи в координатах. Координаты вектора, расстояние между точками, координаты середины отрезка, скалярное произведение векторов в координатах, угол между векторами, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями. Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах. Обратные тригонометрические функции. Их свойства и графики. Уравнение <math>\cos x = a</math>. Уравнение <math>\sin x = a</math>. Уравнение <math>\operatorname{tg} x = a</math>, <math>\operatorname{ctg} x = a</math>. Решение тригонометрических уравнений основных типов: простейшие тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным, решаемые разложением на множители, однородные. Простейшие тригонометрические</p>
--	--	---

	<p>тригонометрических функций. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций. Свойства и графики функций <math>y = \cos x</math>, <math>y = \sin x</math>, <math>y = \operatorname{tg} x</math>, <math>y = \operatorname{ctg} x</math>. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций.</p> <p>Преобразование графиков тригонометрических функций. Системы простейших тригонометрических уравнений.</p> <p>Понятие комплексного числа. Сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа. Форма записи комплексного числа (геометрическая, тригонометрическая, алгебраическая). Арифметические действия с комплексными числами.</p> <p>Определение числовой последовательности и способы ее задания. Свойства числовых последовательностей. Определение предела последовательности. Вычисление пределов последовательностей. Предел функции на бесконечности. Предел функции в точке. Приращение аргумента. Приращение функции. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Алгоритм отыскания производной. Формулы дифференцирования. Правила дифференцирования. Определение сложной функции. Производная тригонометрических функций. Производная сложной функции. Понятие непрерывной функции. Свойства непрерывной функции. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке. Алгоритм решения неравенств методом интервалов.</p> <p>Возрастание и убывание функции, соответствие возрастания и убывания функции знаку производной. Понятие производной высшего порядка, соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке. Задачи на максимум и минимум. Понятие асимптоты, способы их определения. Алгоритм исследования функции и построения ее графика с помощью производной. Дробно-линейная функция.</p> <p>Понятие многогранника. Его элементы: вершины, ребра, грани. Диагональ. Сечение.</p>	<p>неравенства.</p> <p>Преобразование тригонометрических выражений. Решение тригонометрических уравнений и неравенств в том числе с использованием свойств функций.</p> <p>Выполнение расчетов с помощью комплексных чисел. Примеры использования комплексных чисел.</p> <p>Геометрический смысл производной функции – угловой коэффициент касательной к графику функции в точке. Уравнение касательной к графику функции. Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции <math>y=f(x)</math>. Физический (механический) смысл производной – мгновенная скорость в момент времени <math>t</math>: <math>v = S'(t)</math>.</p> <p>Исследование функции на монотонность и построение графиков. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций, построение графиков многочленов с использованием аппарата математического анализа. Формулы и правила дифференцирования. Исследование функций с помощью производной. Наибольшее и наименьшее значения функции.</p> <p>Симметрия в природе, архитектуре, технике, в быту. Понятие правильного многогранника. Свойства правильных многогранников. Конус и его элементы. Сечение конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), конические</p>
--	--	---

	<p>Выпуклые и невыпуклые многогранники. Понятие призмы. Ее основания и боковые грани. Высота призмы. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Ее сечение. Параллелепипед, свойства прямоугольного параллелепипеда, куб. Сечение куба, параллелепипеда. Пирамида и ее элементы. Сечение пирамиды. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Площадь боковой и полной поверхности призмы, пирамиды. Симметрия относительно точки, прямой, плоскости. Симметрия в кубе, параллелепипеде, призме, пирамиде.</p> <p>Цилиндр и его элементы. Сечение цилиндра (параллельное основанию и оси). Развертка цилиндра. Шар и сфера. Взаимное расположение сферы и плоскости. Сечение шара, сферы.</p> <p>Понятие об объеме тела. Объем куба и прямоугольного параллелепипеда. Объем призмы и цилиндра. Отношение объемов подобных тел. Геометрический смысл определителя 3-го порядка. Объемы пирамиды и конуса. Объем шара. Площади поверхностей тел.</p> <p>Первообразная функции. Правила нахождения первообразных. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона – Лейбница. Неопределенный и определенный интегралы. Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции. Первообразная функции. Правила нахождения первообразных. Ее применение.</p> <p>Степенная функция, ее свойства. Преобразование выражений с корнями <math>n</math>-ой степени. Свойства степени с рациональным и действительным показателями. Решение иррациональных уравнений и неравенств.</p> <p>Показательная функция, ее свойства. Решение показательных уравнений и неравенств. Системы показательных уравнений.</p> <p>Логарифм числа. Десятичный и натуральный логарифмы, число <math>e</math>. Свойства логарифмов. Операция логарифмирования. Логарифмическая функция, ее свойства. Понятие логарифмического уравнения. Операция потенцирования. Три основных</p>	<p>сечения. Развертка конуса. Усеченный конус. Его образующая и высота. Сечение усеченного конуса.</p> <p>Комбинации геометрических тел. Использование комбинаций многогранников и тел вращения в практико-ориентированных задачах.</p> <p>Объемы и площади поверхности многогранников и тел вращения.</p> <p>Геометрический смысл определенного интеграла. Формула Ньютона - Лейбница. Определение степенной функции. Использование ее свойств при решении уравнений и неравенств. Решение показательных уравнений методом уравнивания показателей и методом введения новой переменной. Решение показательных неравенств. Применение логарифма. Логарифмическая спираль в природе. Ее математические свойства.</p> <p>Логарифмическая функция. Решение простейших логарифмических уравнений. Операции с множествами. Решение прикладных задач. Операции с множествами. Описание реальных ситуаций с помощью множеств. Применение графов к решению задач.</p> <p>Относительная частота события, свойство ее устойчивости. Статистическое определение вероятности. Оценка вероятности события. Первичная обработка статистических данных. Графическое их представление. Нахождение средних характеристик,</p>
--	--	--

	<p>метода решения логарифмических уравнений: функционально-графический, метод потенцирования, метод введения новой переменной. Логарифмические неравенства. Системы логарифмических уравнений.</p> <p>Понятие множества. Подмножество. Операции с множествами.</p> <p>Понятие графа. Связный граф, дерево, цикл граф на плоскости.</p> <p>Основные понятия комбинаторики. Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей.</p> <p>Виды случайных величин. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Ее числовые характеристики. Вариационный ряд. Полигон частот и гистограмма. Статистические характеристики ряда наблюдаемых данных.</p> <p>Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения. Графический метод решения уравнений, неравенств. Уравнения и неравенства с модулем. Уравнения и неравенства с параметрами.</p>	<p>наблюдаемых данных. Элементы комбинаторики. Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей. Составление и решение профессиональных задач с помощью уравнений. Общие методы решения уравнений. Уравнения и неравенства с модулем и с параметрами.</p>
--	---	--

### **3. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

#### **3.1. Задания для оценки освоения раздела 1 «Повторение курса математики основной школы»**

##### **Практическое занятие №1**

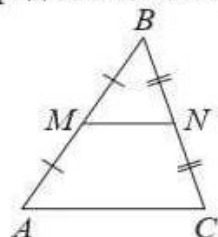
##### **Тема: «Геометрия на плоскости»**

**Цель:** отработать практические умения и навыки использования свойств планиметрических фигур, формировать умение самостоятельного применения студентами основных правил и формул планиметрии.

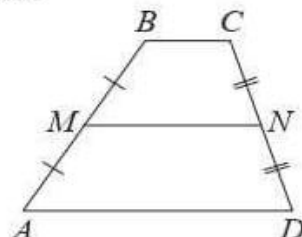
##### **Теоретические сведения к практической работе**

Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n-2)$ .

Средняя линия треугольника и трапеции

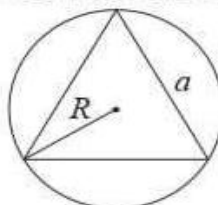


$$\begin{aligned} MN &\text{ — ср. лин.} \\ MN &\parallel AC \\ MN &= \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

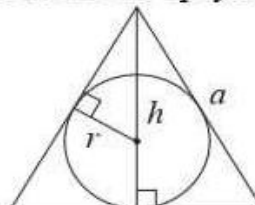


$$\begin{aligned} BC &\parallel AD \\ MN &\text{ — ср. лин.} \\ MN &\parallel AD \\ MN &= \frac{BC + AD}{2} \end{aligned}$$

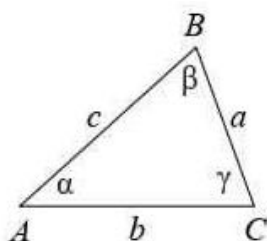
Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$\begin{aligned} R &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ S &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r &= \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



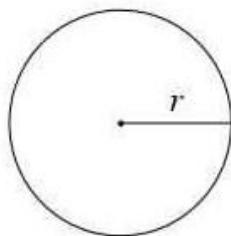
Для треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  $BC=a$ :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности.

Для треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  $BC=a$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

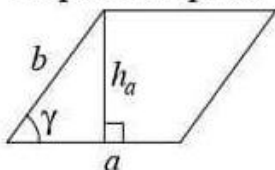


Длина окружности  $C = 2\pi r$

Площадь круга  $S = \pi r^2$

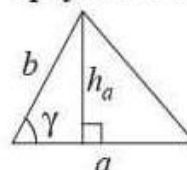
**Площади фигур**

Параллелограмм

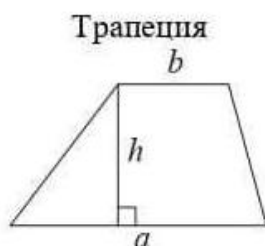


$$\begin{aligned} S &= ah_a \\ S &= ab \sin \gamma \end{aligned}$$

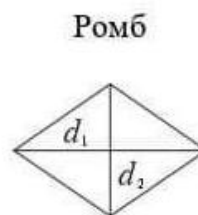
Треугольник



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a \\ S &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma \end{aligned}$$



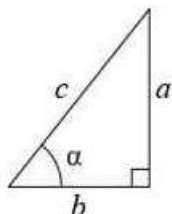
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



$d_1, d_2$  — диагонали

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Прямоугольный треугольник



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Теорема Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$

Основное тригонометрическое тождество:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

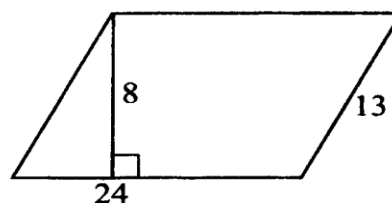
Некоторые значения тригонометрических функций

$\alpha$	градусы	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

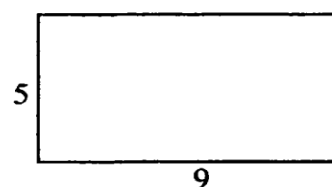
### Содержание практической работы:

#### 1 вариант

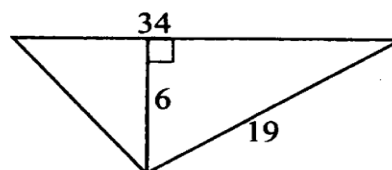
1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



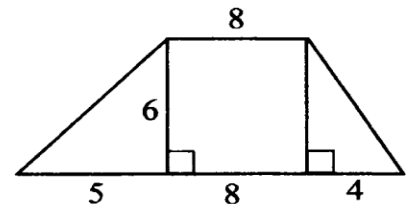
2. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на рисунке.



3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



5. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты  $(-1; 2)$ ,  $(-1; 5)$ ,  $(4; 0)$ .

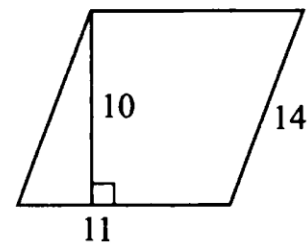
6. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 58, а одна из диагоналей равна 84.

7. Найдите меньшее основание прямоугольной трапеции, у которой площадь равна  $3150\sqrt{3}$ , высота равна  $30\sqrt{3}$ , а острый угол равен  $30^\circ$ .

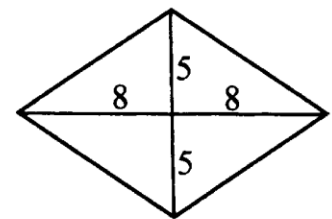
8. Найдите площадь  $S$  кругового сектора, если радиус круга равен 21, а угол сектора равен  $120^\circ$ . В ответе запишите  $\frac{S}{\pi}$ .

### 2 вариант

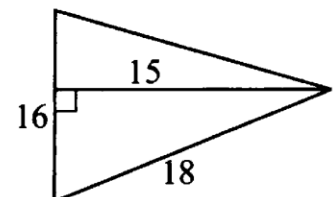
1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



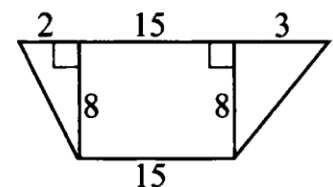
2. Найдите площадь ромба, изображённого на рисунке.



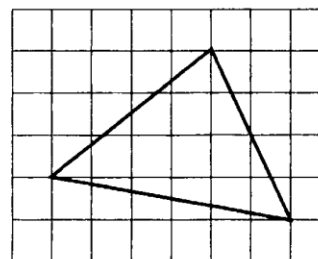
3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



5. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ . Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



6. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой меньшее основание равно 20, высота равна 24, а боковая сторона равна 51.

7. Найдите сторону ромба, у которого площадь равна  $450\sqrt{2}$ , а один из углов равен  $45^\circ$ .

8. Радиус круга равен 13. Найдите его площадь, делённую на  $\pi$ .

### Выбор верных утверждений

#### 1 вариант

1. Укажите номера **верных** утверждений.

- 1) В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол.
- 2) Сумма односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей меньше  $180^\circ$ .
- 3) Если углы при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

2. Укажите номера **неверных** утверждений.

- 1) Если две противоположные стороны четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- 2) Диагонали ромба делят углы ромба пополам.
- 3) Трапеция равнобедренная, если её боковые стороны параллельны.

#### 2 вариант

1. Укажите номера **верных** утверждений.

- 1) Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
- 2) Если гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
- 3) Точка пересечения медиан треугольника — центр описанной окружности.



2. Укажите номера **верных** утверждений.

- 1) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
- 2) В трапеции сумма углов при боковой стороне равна  $90^\circ$ .
- 3) Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, является параллелограммом.



## **Практическое занятие №2**

### **Тема: «Процентные вычисления»**

**Цель:** рассмотреть алгоритмы решения базовых задач на проценты:

- а) нахождение процентов от заданного числа (величины);
- б) нахождение неизвестного числа по его процентам;
- в) нахождение процентов одного числа от другого;

закрепить умения и навыки решения задач с процентами, определив и оценив уровень сформированности компетенций по теме занятия.

### **Теоретические сведения**

Слово « процент » происходит от латинских слов pro centum, что буквально означает « со ста ». Процент = одна сотая часть числа.

Понимание процентов и умение выполнять процентные вычисления в настоящее время необходимы каждому человеку. Очень велико прикладное значение этой темы. Она затрагивает финансовую, демографическую, экологическую, социологическую и другие сферы.

#### **Три основных типа задач на проценты:**

##### **1)Нахождение процента от числа**

Чтобы найти проценты от числа, можно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

Задача: Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение: Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов).

$$60 \% = 0,6$$

$$500 \cdot 0,6 = 300 \text{ насосов высшей категории качества.}$$

Ответ: 300 насосов высшей категории качества.

##### **2)Нахождение числа по его проценту**

Чтобы найти число по его процентам, можно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

Задача: Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Решение:

Итак, нам неизвестно сколько всего страниц в книге. Но мы знаем, что часть, которую прочитал ученик (138 страниц) составляет 23 % от общего количества страниц в книге.

Так как 138 стр. - это всего лишь часть, само количество страниц, естественно, будет больше 138. Это поможет нам при проверке.

$$138 : 23 \% = 138 : 0,23 = \frac{138 \cdot 100}{23} = 600 \text{ (стр.)}$$

Проверка:  $600 > 138$  (это означает, что 138 является частью 600).

Ответ: 600 (стр.) - общее количество страниц в книге.

### **3) Сколько процентов одно число составляет от другого.**

Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого можно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100.

Задача: Из 200 арбузов 16 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелые арбузы?

Решение:

16 делим на общее количество арбузов и умножаем на 100 %.

$$(16 : 200) \cdot 100\% = \frac{16}{200} \cdot 100\% = \frac{2}{25} \cdot 100\% = \frac{200\%}{25} = 8\%$$

Ответ: 8 % - составляют незрелые арбузы от всех арбузов.

### **Примеры решения задач**

**Задача 1:** Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 7:13. Какой процент в фарше составляет свинина?

Решение: Пусть взяли  $7x$  г говядины, тогда свинины взяли  $13x$  г. Следовательно, свинина составляет в фарше  $\frac{13x}{7x + 13x} \cdot 100\% = 65\%$ .

Ответ: 65 % .

**Задача 2:** Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 25000 рублей?

Решение:  $25000 \cdot 0,13 = 3250$  рублей.

Ответ: 3250 рублей.

**Задача 3:** Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько сушеных яблок получится из 300 кг свежих?

Решение: Из условия следует, что при сушке теряется  $300 \cdot 0,84 = 252$  кг.

$$300 - 252 = 48 \text{ кг}$$

Ответ: 48 кг.

**Задача 4:** В спортивном магазине велосипед продается со скидкой 15% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена велосипеда?

Решение:

Из условия следует, что 4500—это 85% от первоначальной цены.

$$4500 \text{ рублей} - 85\%$$

$$X \text{ рублей} - 100\%, \quad X \approx 5294,12 \text{ рублей.}$$

Ответ: 5294,12р.

**Задача 5:** Цена товара понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной ценой?

Решение:

Обозначим первоначальную цену товара через  $x$ . После первого понижения цена станет равной

$$x - 0,4x = 0,6x.$$

Второе понижение цены составляет 25% от новой цены  $0,6x$ , поэтому после второго понижения будем иметь цену

$$0,6x - 0,25 \cdot 0,6x = 0,45x;.$$

После двух понижений суммарное изменение цены составляет:

$$x - 0,45x = 0,55x.$$

Так как величина  $0,55x$ ; составляет 55% от величины  $x$ , то цена товара понизилась на 55%.

Ответ:

55%.

**Задача 6:** В колледже 260 обучающихся, из которых 10% неуспевающих. После отчисления некоторого числа неуспевающих, их процент снизился до 6,4%. Сколько учащихся отчислено?

Решение:

До отчисления количество неуспевающих до отчисления составляло

$$0,1 \cdot 260 = 26.$$

Пусть отчислили  $x$  человек. Тогда всего в лицее осталось  $(260 - x)$  учащихся, из них неуспевающих стало  $26 - x$ . Имеем пропорцию

$$260 - x \quad - \quad 100\%,$$

$$26 - x \quad - \quad 6,4\%.$$

$$(260 - x)0,064 = (26 - x)100,$$

Решая полученное уравнение, находим  $x = 10$ .

Ответ:

10.

**Задача 7:** Первоначальная стоимость единицы продукции равнялась 75 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое, число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной стоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равна 72 руб. Определите проценты повышения и понижения стоимости единицы продукции.

Решение:

Пусть  $x\%$  - это проценты повышения (и понижения) стоимости единицы продукции. По определению  $x\%$  от 75 это —  $75 \cdot 0,01x$ . Тогда после первого повышения цена станет равняться  $75 + 0,75x$ .

В течение второго года цена снизится на величину

$$0,01x(75 + 0,75x) = 0,75x + 0,0075x^2.$$

Теперь можно записать уравнение для окончательной цены

$$(75 + 0,75x)(75 - 0,75x + 0,0075x^2) = 72;$$

$$x^2 = 400; \text{ отсюда } x_1 = -20, x_2 = 20.$$

Подходит только один корень этого уравнения:  $x_2 = 20$ .

Ответ:

20%.

**Задача 8:** На банковский счет было положено 10 тыс. руб. После того, как деньги пролежали один год, со счета сняли 1 тыс. руб. Еще через год на счету стало 11 тыс. руб. Определить, какой процент годовых начисляет банк.

Решение:

Пусть банк начисляет  $p\%$  годовых.

1) Сумма в 10000 рублей, положенная на банковский счет под  $p\%$  годовых, через год возрастет до величины

$$10000 + 0,01 \cdot p \cdot 10000 = 10000 + 100p \text{ руб.}$$

Когда со счета снимут 1000 руб., там останется  $9000 + 100p$  руб.

2) Еще через год последняя величина за счет начисления процентов возрастет до величины  $9000 + 100p + 0,01p(9000 + 100p) = p^2 + 190p + 9000$  руб.

По условию эта величина равна 11000 руб, поэтому имеем квадратное уравнение.

$$p^2 + 190p + 9000 = 11000;$$

$$p^2 + 190p - 2000 = 0, \text{ решим это квадратное уравнение, } p_1 = 10, p_2 = -200.$$

Отрицательный корень не подходит.

Ответ: 10%.

**Задача 9:** В городе в настоящее время 48400 жителей. Известно, что население этого города увеличивается ежегодно на 10%. Сколько жителей было в городе два года назад?

Решение:

Предположим, что два года назад количество жителей город было  $x$  человек, тогда количество жителей в настоящее время выражается через  $x$  по формуле сложных процентов:

$$x(1+0,1)^2 = 1,21x.$$

Из условия задачи:

$$1,21x = 48400;$$

$$x = 40000.$$

Ответ: 40000 человек.

### Содержание практической работы:

#### Вариант 1

1. За активную общественную деятельность студенту увеличили стипендию на «а»%. Величина стипендии-1050 рублей. Какую стипендию теперь получит активный студент? (Значение «а» выберите сами).
2. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 12%.Сколько ему достанется, если стипендия 800 рублей?
3. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
4. В магазине мультиварка продается со скидкой 20% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена мультиварки?

5. Грибы при сушке теряют 78% своей массы. Сколько сушеных грибов получится из 100 кг свежих?
6. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 21000 рублей?
7. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1250 рублей, если размер скидки 30%?
8. В декабре шуба стоила 38 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 20%, а в мае снизили на 15%, в июле была распродажа со скидкой 30%. Сколько теперь стоит шуба?

### **Вариант 2**

1. За активную общественную деятельность студенту увеличили стипендию на «а»%. Величина стипендии-1000 рублей. Какую стипендию теперь получит активный студент? (Значение «а» выберите сами).
2. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 16%. Сколько ему достанется, если стипендия 900 рублей?
3. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
4. В магазине продается блендер со скидкой 10% за 2500 рублей. Какова первоначальная цена блендера?
5. Укроп при сушке теряет 86% своей массы. Сколько сушеного укропа получится из 1 кг свежего?
6. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 30000 рублей?
7. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1280 рублей, если размер скидки 15%?
8. В декабре шуба стоила 35 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 15%, а в мае снизили на 10%, в июле была распродажа со скидкой 20%. Сколько теперь стоит шуба?

### **Практическое занятие №3**

#### **Тема: «Уравнения и неравенства»**

**Цель:** закрепить умение решать рациональные уравнения и неравенства, а также навык самостоятельной практической работы по формированию компетенций в соответствии с темой занятия.

#### **Теоретические сведения**

Уравнение вида  $ax+b=0$ , где  $a$  и  $b$  — некоторые постоянные, называется линейным уравнением.

Если  $a \neq 0$ , то линейное уравнение имеет единственный корень:  $x = -\frac{b}{a}$ .

Если  $a=0$ ;  $b \neq 0$ , то линейное уравнение решений не имеет.

Если  $a=0$  и  $b=0$ , то, переписав исходное уравнение в виде  $ax=-b$ , легко видеть, что любое  $x$  является решением линейного уравнения.

Уравнение вида  $ax^2+bx+c=0$ , где  $a, b, c$  — некоторые числа ( $a \neq 0$ );  $x$  — переменная, называется квадратным уравнением. Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант  $D=b^2-4ac$ .

Если  $D=0$ , то квадратное уравнение имеет единственное решение:  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Если  $D>0$ , то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если  $D<0$ , то квадратное уравнение не имеет корней.

Линейным называется неравенство вида  $ax>b$  (или соответственно  $ax<b$ ;  $ax \geq b$ ;  $ax \leq b$ ), где  $a \neq 0$  и  $b$  — числа.

Решением неравенства с одной переменной называется множество таких значений переменной, которые обращают его в верное числовое неравенство.

1. Если  $a>0$ , то решение неравенства  $ax>b$  имеет вид  $x > \frac{b}{a}$  (или  $x \in (\frac{b}{a}; +\infty)$ ),

2. Если  $a<0$ , то решение неравенства  $ax \geq b$  имеет вид  $x \leq \frac{b}{a}$  (или  $x \in (-\infty; \frac{b}{a}]$ ).

3. Если  $a=0$ , то неравенство  $ax>b$  принимает вид  $0 \cdot x > b$ , т. е. оно не имеет решения при  $b \geq 0$  и верно при любых  $x$ , если  $b < 0$ .

Неравенства вида  $P_n(x) > 0$  ( $P_n(x) < 0$ ),  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$  ( $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ ), где  $P_n(x)$ ;  $Q_m(x)$  — многочлены соответственно степеней  $n$  и  $m$ , т. е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0;$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

обычно решаются методом интервалов. Он

### Содержание практической работы:

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<b>1. Решить уравнение:</b>	
$1. \frac{1}{3}y + 2 = -\frac{1}{6}y + 5$ $2. (x+2)(x-1)=0$ $3. x^2 - 5x + 6 = 0$ $4. 2x - (5x-6) = 7 + (9x-1)$ $5. (5-2x)(7+3x)=0$ $6. 2y^2 - 2 = 0$ $7. 3x-1 = 2x - (4-x)$ $8. (y-3)(y+4)(3y-5)=0$ $9. 16-4y^2 = 0$ $10. 2(x-5) - 7(x+2)=1$ $11. 6x(4x-6)(7-x)=0$ $12. t^2 - t^4 = 0$	$1. \frac{1}{2}y - 3 = -\frac{1}{6}y - 7$ $2. -3x(0,6x-12)=0$ $3. 81-x^2 = 0$ $4. 7x-1 = 2x$ $5. (x-5)(2x+8)=0$ $6. z^2 - 9 = 0$ $7. 2(x-3) = -3(x+2)$ $8. 5x(x+1)(3x-17)=0$ $9. x^3 - 4x = 0$ $10. 5x - (2x-9) = 6(x+3)$ $11. (3x+2)^2 = 0$ $12. x^2 + 4x + 4 = 0$
<b>2. Решить неравенство:</b>	
$1. x+6 > 2-3x$ $2. 2x^2-7x+3 \leq 0$ $3. 2x^2-7x+3 \leq 0$ $4. x^2-6x+13 > 0$ $5. 3x+7 > 7x-9$ $6. x^2+7x-18 \leq 0$ $7. 6x-7 > 5x-1$ $8. x^2-6x+8 \leq 0$ $9. 3x > 4x+1$ $10. x^2-3x+2 \leq 0$	$1. 6x-7 > 3+4x$ $2. 4x^2+x-3 \geq 0$ $3. 3x-6 > 4-9x$ $4. x^2-2x+2 < 0$ $5. x-3 > -3x+1$ $6. x^2+2x-35 \leq 0$ $7. 3x+6 > 8x-4$ $8. x(x-3)(x-6) \leq 0$ $9. 4x+3 > 2x+1$ $10. x^2+x-6 \leq 0$

### Контрольная работа №1 (входной контроль)

**Цель:** установление фактического уровня теоретических знаний обучающихся по математике обязательного компонента учебного плана, их практических умений и навыков; установление соответствия уровня ЗУН обучающихся требованиям государственного образовательного стандарта общего

образования.

Контрольная работа по математике состоит из 2 вариантов. Каждый вариант включает 15 заданий по материалам, взятым из банка заданий для подготовки учащихся к сдаче ОГЭ.

Ответом на каждое задание служит целое число или десятичная дробь. На выполнение контрольной работы отводится 45 минут.

По результатам работы каждому студенту выставляется отметка по математике.

Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

14-15 баллов - «5»

10 - 13 баллов - «4»

7-9 баллов - «3»

Менее 7 баллов - «2»

**Эталоны ответов к заданиям контрольной работы №1**

**Вариант 1**

- 1 -1
- 2 Р
- 3 2
- 4 28
- 5 АБВ
- 413
- 6 7,046
- 7 8
- 8  $x < -4$
- 9 391
- 10 30
- 11 1,5
- 12 13
- 13 2
- 14 12
- 15 170

**Вариант 2**

- 1 64
- 2 3
- 3 4
- 4 0,64
- 5 АБВ
- 421
- 6 2
- 7 4,5
- 8 1
- 9 50
- 10 12
- 11 5,5
- 12 24
- 13 3
- 14 16
- 15 3

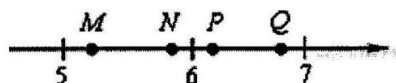


# Задания по математике ( 1 курс)

Вариант 1

**Задание 1.** Найдите значение выражения  $\frac{5,6}{1,9 - 7,5}$ .

**Задание 2.** Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу  $\sqrt{37}$ . Какая это точка?



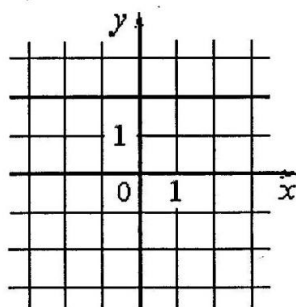
**Задание 3.** В каком случае числа расположены в порядке возрастания?  
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $6; 2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}$
- 2)  $2\sqrt{5}; 6; 5\sqrt{2}$
- 3)  $5\sqrt{2}; 6; 2\sqrt{5}$
- 4)  $2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}; 6$

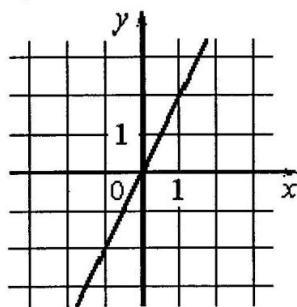
**Задание 4.** Поступивший в продажу в январе мобильный телефон стоил 3000 рублей. В апреле он стал стоить 2160 рублей. На сколько процентов снизилась цена на мобильный телефон в период с января по апрель?

**Задание 5.** Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

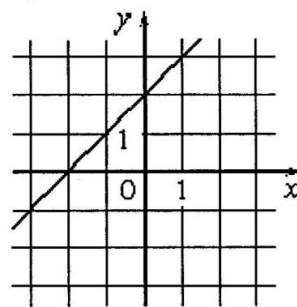
А)



Б)



В)



- 1)  $y = 2x$
- 2)  $y = -2x$
- 3)  $y = x + 2$
- 4)  $y = 2$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

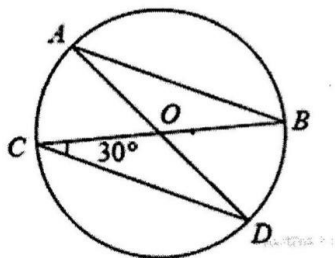
А	Б	В

**Задание 7.** Упростите выражение  $(a - 3)^2 - a(5a - 6)$  и найдите его значение при  $a = -\frac{1}{2}$ . В ответе запишите найденное значение.

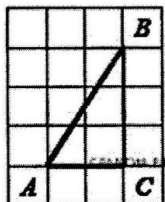
**Задание 8.** Решите неравенство  $19 - 7x > 20 - 3(x - 5)$ .

**Задание 9.** Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 20 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3,4 м и 4,6 м?

**Задание 10.** В окружности с центром в точке  $O$  проведены диаметры  $AD$  и  $BC$ , угол  $OCD$  равен  $30^\circ$ . Найдите величину угла  $OAB$ .



**Задание 11.** Найдите тангенс угла  $A$  треугольника  $ABC$ , изображённого на рисунке.



**Задание 12.** Укажите номера неверных утверждений.

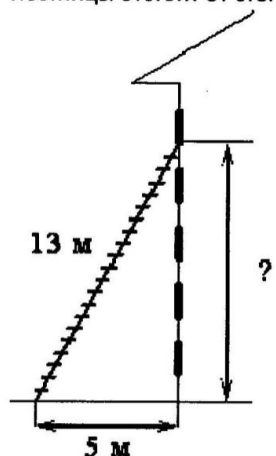
- 1) При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой сумма накрест лежащих углов равна  $180^\circ$ .
- 2) Диагонали ромба перпендикулярны.
- 3) Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения его биссектрис.

**Задание 13.** В таблице представлены нормативы по технике чтения в 3 классе.

Отмет-ка	Количество прочитанных слов минуту	
	Первое полугодие	Второе полугодие
«2»	59 и менее	69 и менее
«3»	60 – 69	70 — 79
«4»	70 – 79	80 — 89
«5»	89 и более	99 и более

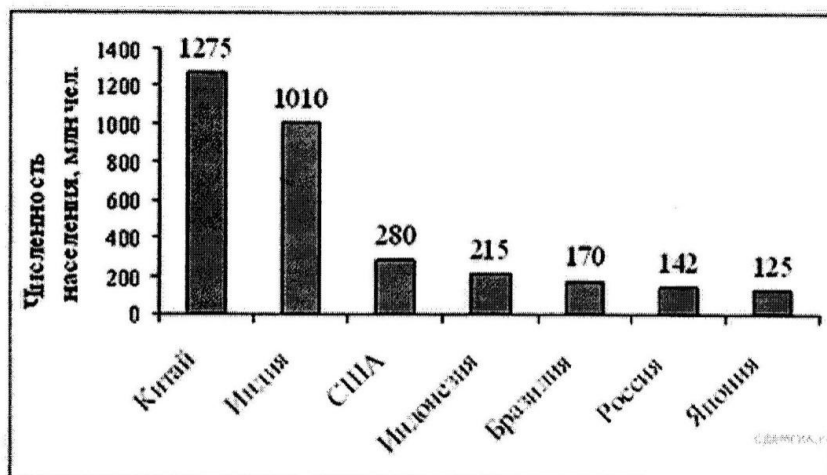
Какую отметку получит третьеклассник, прочитавший в апреле 68 слов за минуту?

**Задание 14.** Пожарную лестницу длиной 13 м приставили к окну пятого этажа дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 5 м. На какой высоте расположено окно?



**Задание 15.** На диаграмме представлены некоторые из крупнейших по численности населения стран мира.

Численность населения какого государства примерно в 6 раз меньше численности населения Индии? В ответе напишите численность населения этой страны в млн чел.



# Задания по математике ( 1 курс)

Вариант 2

**Задание 1.** Найдите значение выражения:  $400 \cdot 0,004 \cdot 40$ .

**Задание 2.** На координатной прямой отмечено число  $a$ .



Какое из утверждений относительно этого числа является верным?  
В ответе укажите номер правильного варианта.

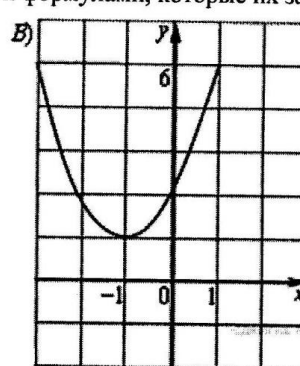
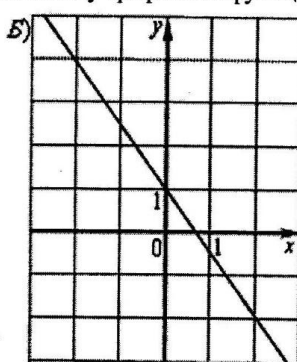
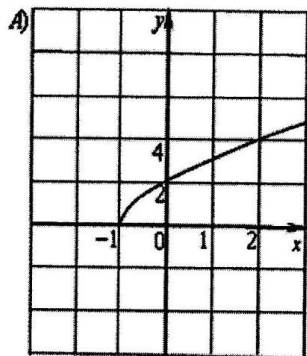
- 1)  $-a > -6$
- 2)  $9 - a < 0$
- 3)  $\frac{1}{a} > 0$
- 4)  $a - 8 > 0$

**Задание 3.** Представьте выражение  $\frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{x^9}$  в виде степени с основанием  $x$ .  
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $x^{14}$
- 2)  $x^{54}$
- 3)  $x^{-45}$
- 4)  $x^{-14}$

**Задание 4.** Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет номер, являющийся двузначным числом?

**Задание 5.** Укажите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



- 1)  $y = (x+1)^2 + 2$
- 2)  $y = 1 - 2x$
- 3)  $y = \sqrt{5x+5}$
- 4)  $y = \sqrt{5x-5}$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

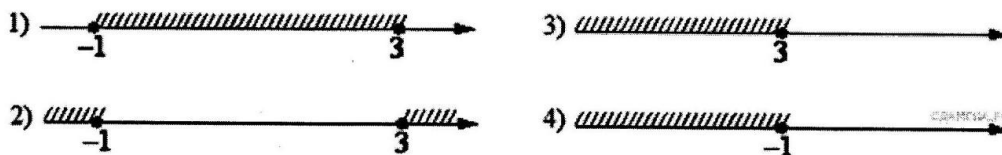
А	Б	В

**Задание 6.** Даны пятнадцать чисел, первое из которых равно 6, а каждое следующее больше предыдущего на 4. Найти пятнадцатое из данных чисел.

**Задание 7.** Упростите выражение  $\frac{4a}{a+b} \cdot \frac{ab+b^2}{16a}$  и найдите его значение при  $a = 9,2$ ;  $b = 18$ . В ответе запишите найденное значение.

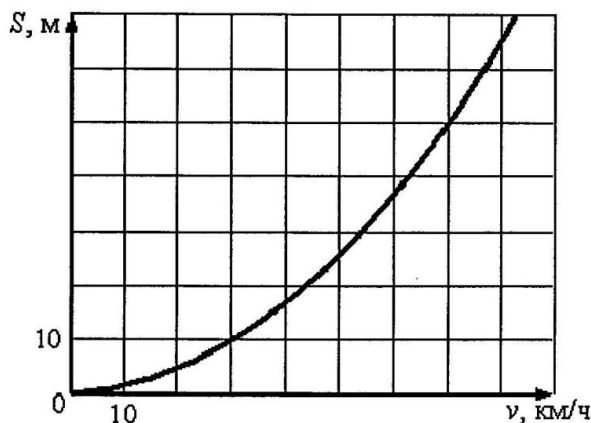
**Задание 8.** На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ?

В ответе укажите номер правильного варианта.

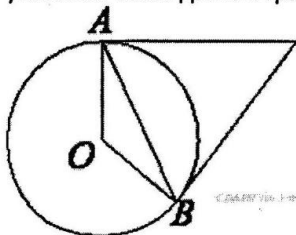


- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

**Задание 9.** При резком торможении расстояние, пройденное автомобилем до полной остановки (тормозной путь), зависит от скорости, с которой автомобиль двигался. На рисунке показан график этой зависимости. По горизонтальной оси откладывается скорость (в км/ч), по вертикальной – тормозной путь (в метрах). Определите по графику, каким будет тормозной путь автомобиля, который движется со скоростью 70 км/ч. Ответ дайте в метрах.



**Задание 10.** Касательные в точках  $A$  и  $B$  к окружности с центром  $O$  пересекаются под углом  $24^\circ$ . Найдите угол  $ABO$ . Ответ дайте в градусах.



**Задание 11.** Основания трапеции равны 10 и 11. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

**Задание 12.** Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Любые два прямоугольных треугольника подобны.
- 2) Если катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны соответственно 6 и 10, то второй катет этого треугольника равен 8.
- 3) Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.
- 4) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

**Задание 13.** Для квартиры площадью 75 кв. м заказан натяжной потолок белого цвета. Стоимость работ по установке натяжных потолков приведена в таблице.

Цвет потолка	Цена в рублях за 1 м <sup>2</sup> (в зависимости от площади помещения)			
	до 10 м <sup>2</sup>	от 11 до 30 м <sup>2</sup>	от 31 до 60 м <sup>2</sup>	свыше 60 м <sup>2</sup>
белый	1200	1000	800	600
цветной	1350	1150	950	750

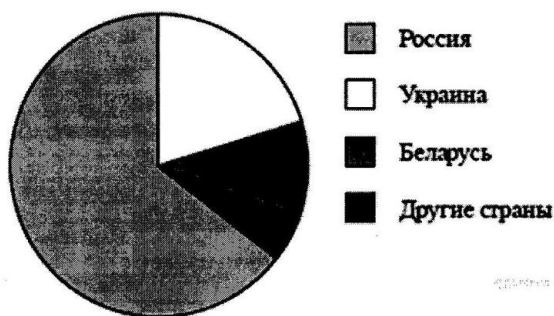
Какова стоимость заказа, если действует сезонная скидка в 5%?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 4275 рублей
- 2) 45 000 рублей
- 3) 42 750 рублей
- 4) 44 995 рублей

**Задание 14.** Государству принадлежит 60% акций предприятия, остальные акции принадлежат частным лицам. Общая прибыль предприятия после уплаты налогов за год составила 40 млн. р. Какая сумма из этой прибыли должна пойти на выплату частным акционерам?

**Задание 15.** На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 9 млн пользователей.



Какое из следующих утверждений неверно?

- 1) Пользователей из Беларуси меньше, чем пользователей из Украины.
- 2) Пользователей из России больше 4 миллионов.
- 3) Пользователей из Украины больше четверти общего числа пользователей.
- 4) Пользователей из Беларуси больше, чем пользователей из Финляндии.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

### 3.2. Задания для оценки освоения раздела 2 «Прямые и плоскости в пространстве»

#### Практическое занятие №4

#### Тема: «Теорема о трех перпендикулярах»

**Цель:** доказать теорему о трех перпендикулярах, показав её применение в стандартных геометрических ситуациях, формировать умение самостоятельного применения студентами прямой и обратной теорем о трех перпендикулярах при решении задач.

#### Теоретические сведения

##### Теорема о трех перпендикулярах

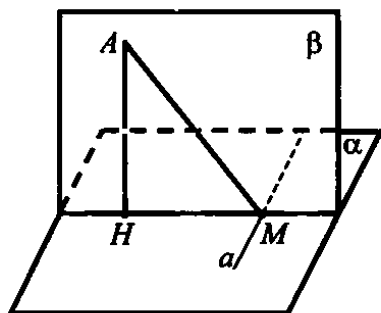


Рис. 7

##### **Теорема:**

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

*Вопрос:* Что же дано в этой теореме?

*Дано:*  $AH \perp \alpha$ ,  $AM$  – наклонная к плоскости  $\alpha$  (рис. 7).

*Доказать:*  $a \perp AM$ .

$HM$  – проекция наклонной,  $a \in \alpha$ ,  $a \perp HM$ .

*Доказательство:*  $a \perp AM$ .

*Доказательство:*  $AH \perp a$ , так как  $AH \perp \alpha \Rightarrow a \perp AH$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости,  $\Rightarrow a \perp AM$  по определению перпендикулярности прямой и плоскости.

*Вопрос:* О каких же трех перпендикулярах идет речь в теореме?

Три перпендикуляра:  $a$ ,  $HM$ ,  $AM$ .

##### **Обратная теорема:**

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

#### Содержание практической работы:

##### Задача 1

Из некоторой точки проведены две наклонные.

*Докажите, что:* а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны наклонные; в) если наклонные не равны, то большая наклонная имеет большую проекцию.

### Задача 2

Из точки  $A$ , не принадлежащей плоскости  $\alpha$ , проведены две наклонные  $AB$  и  $AC$  равные и перпендикуляр  $AO$ . Известно, что  $\angle AOB = \angle BAC = 60^\circ$ ,  $AO = 1,5$  см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

### Задача 3

Дано:  $A \notin \alpha$ ,  $AB$  – наклонная,  $AB \cap \alpha = B$ ,  $B \in \alpha$ ,

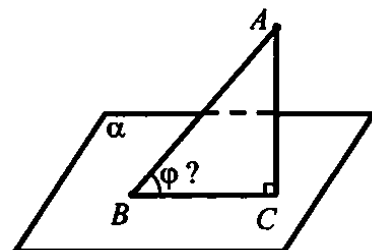
$$C \in \alpha, BC = \frac{1}{2} AB$$

Найти: угол между  $AB$  и  $\alpha$ .

Решение:  $AC \perp \alpha$ ,  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cos \angle ABC = \frac{BC}{AB}$ ;  $\cos \angle ABC = \frac{1}{2} AB : AB = \frac{1}{2}$ ;  $\varphi = \angle ABC = \frac{1}{2}$ ;

Угол  $ABC = \dots$

Ответ:...

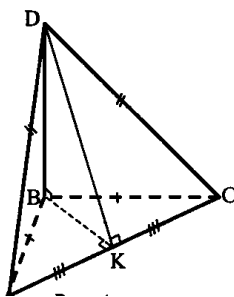


### Задача 4

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BD \perp (ABC)$ ,  $BD = 9$  см,  $AC = 10$  см,  $BC = BA = 13$  см

Найти: а) расстояние от точки  $D$  до  $AC$ ;

б)  $S_{\triangle ACD}$ .



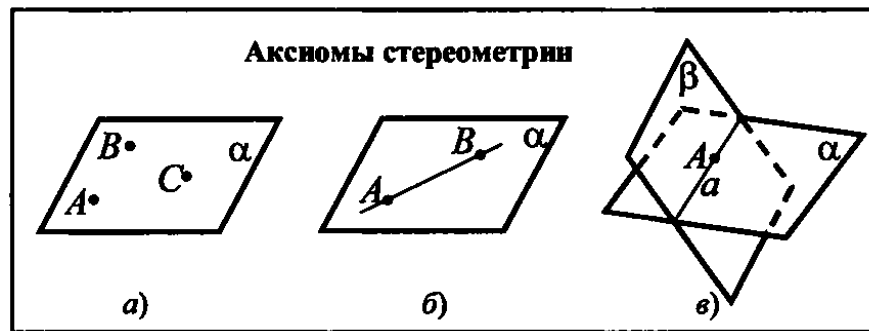
## Практическое занятие №5

### Тема: «Аксиомы стереометрии. Перпендикулярность прямой и плоскости»

**Цель:** закрепить аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, теоретический материал о перпендикулярности прямых и плоскостей, формировать навык применения аксиом, их следствий, определений и теорем о перпендикулярности прямых и плоскостей при решении задач.

### Теоретические сведения:





### Аксиома 1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

### Аксиома 2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости\*.

### Аксиома 3

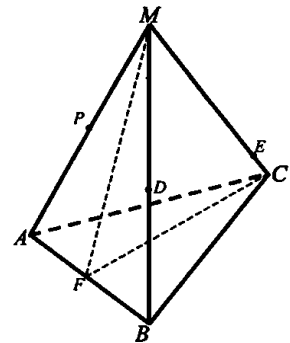
Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

## Содержание практической работы:

### Задача 1

Дан тетраэдр  $MABC$ , каждое ребро которого равно 6 см.  $D \in MB$ ,  $E \in MC$ ,  $F \in AB$ ,  $AF = FB$ ,  $P \in MA$ .

- 1) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а)  $MAB$  и  $MFC$ ; б)  $MCF$  и  $ABC$ .
- 2) Найдите длину  $CF$  и  $S_{ABC}$ .
- 3) Как построить точку пересечения прямой  $DE$  с плоскостью  $ABC$ ?



### Задача 2

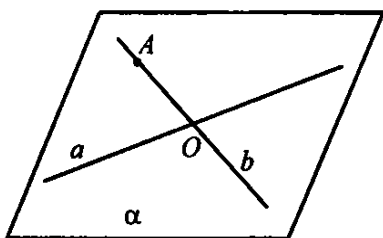
Дано:  $ABCD$  – параллелограмм (рис. 10).  $AC \cap BD = O$ ,  $O \in \alpha$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ .

Доказать:  $D \in \alpha$ ,  $C \in \alpha$ .

### Задача 3

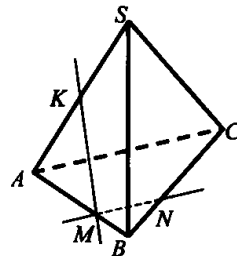
Дано: а)  $A \in a$ ,  $b \cap a = O$ ,  $A \in b$

Доказать:  $b \subset \alpha$ .



#### Задача 4

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) четыре точки, лежащие в плоскости  $SAB$ ; б) плоскость, в которой лежит прямая  $MN$ ; в) прямую, по которой пересекаются плоскости  $SAC$  и  $SBC$ .
2. Точка  $C$  – общая точка плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Прямая проходит через точку  $C$ . Верно ли, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ ? Ответ объясните.
3. Через прямую  $a$  и точку  $A$  можно провести две различные плоскости. Каково взаимное расположение прямой  $a$  и точки  $A$ ? Ответ объясните.
4. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) четыре точки, лежащие в плоскости  $ABC$ ; б) плоскость, в которой лежит прямая  $KN$ ; в) прямую, по которой пересекаются плоскости  $SAC$  и  $SAB$ .



### Практическое занятие №6

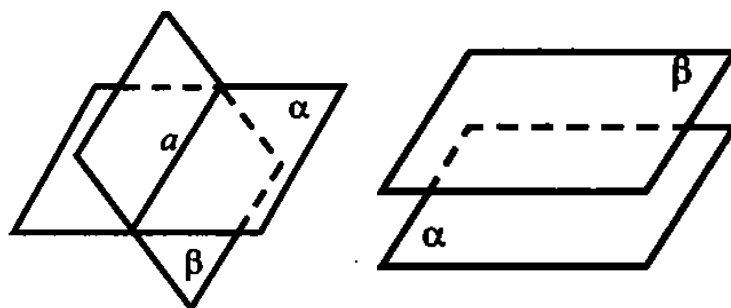
#### Тема: «Параллельность двух прямых, перпендикулярных плоскости, перпендикулярность плоскостей»

**Цель:** закрепить знания о взаимном расположении двух прямых в пространстве, о параллельности двух прямых, перпендикулярной одной и той же плоскости, повторить определение и свойства перпендикулярных плоскостей, формировать навык применения теоретического материала при решении задач.

#### Теоретические сведения:

Как и в планиметрии, две различные прямые в пространстве либо пересекаются в одной точке, либо не пересекаются (не имеют общих точек). Однако второй случай допускает две возможности: прямые лежат в одной плоскости (параллельны) или прямые не лежат в одной плоскости. В первом случае они параллельны, а во втором – такие прямые называются скрещивающимися.





### Теорема

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Дано:  $\alpha, \beta$ ,  $AB$  лежит в плоскости  $\alpha$ ,  $AB \perp \beta$ ,  $AB \cap \alpha = A$  (рис. 3).

Доказать:  $\alpha \perp \beta$ .

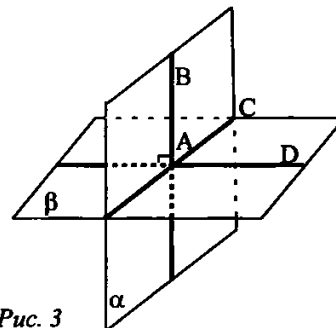


Рис. 3

Доказательство:  $\alpha \cap \beta = AC$ ,  $AB \perp AC$ , так как  $AB \perp \beta$  по условию. Проведем в плоскости  $\beta$   $AD \perp AC$ .  $\angle BAD$  – линейный угол двугранного угла. Но  $\angle BAD = 90^\circ$ , так как  $BA \perp \beta$ . Значит,  $\alpha \perp \beta$ .

### Содержание практической работы:

#### Задача 1

Через основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  проведена плоскость  $\alpha$ .  $BC \notin \alpha$ . Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон  $AB$  и  $CD$ , параллельна плоскости  $\alpha$ .

Дано:  $ABCD$  – трапеция;  $AD \in \alpha$ ,  $CB \notin \alpha$ ;  $AK = KB$ ,  $CN = ND$  (рис. 3).

Доказать:  $KN \parallel \alpha$ .

Доказательство:

1.  $KN$  – средняя линия трапеции, значит  $KN \parallel AD$ .

2.  $\left. \begin{array}{l} KN \parallel AD \\ AD \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow KN \parallel \alpha$  (по теореме о параллельности прямой и плоскости).

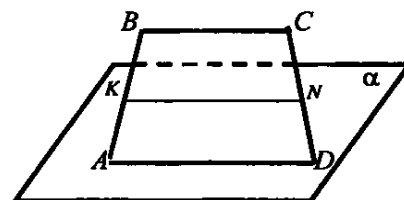


Рис. 3

#### Задача 2

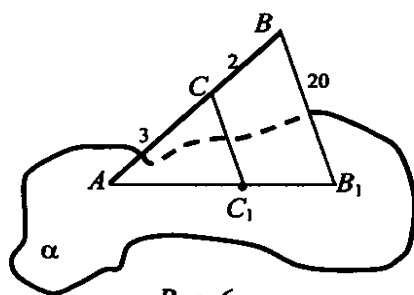


Рис. 6

Дано:  $AB_1, \alpha; A \in \alpha; BB_1 \parallel CC_1; B_1 \in \alpha; C_1 \in \alpha; AC : CB = 3 : 2; BB_1 = 20$  см (рис. 6).

Найти:  $CC_1$ .

Решение:

1. Докажем, что точки  $A, C_1, B_1$  лежат на одной прямой. Точка  $A$  и  $BB_1$  определяют плоскость  $\beta$ .  $\beta \in \alpha = AB_1$ .

Докажем, что  $C_1 \in AB_1$ . Пусть  $C_1 \notin \beta$ , тогда

$$CC_1 \cap \beta = C. \quad \left. \begin{array}{l} CC_1 \parallel BB_1 \\ CC_1 \cap \beta \end{array} \right\} \Rightarrow BB_1 \cap \beta, \text{ что противоречит } BB_1 \in \beta.$$

$CC_1 \cap \beta$ . Следовательно,  $C_1 \in AB_1$ .

2. Так как  $BB_1 \parallel CC_1$ , то  $\triangle ACC_1 \sim \triangle ABB_1$ , тогда  $AC : AB = CC_1 : BB_1$ ;

$$3 : 5 = CC_1 : 20; CC_1 = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12.$$

(Ответ: 12 см.)

Решить задачу 2 при условии:  $AC:CB = 2:6$   $BB = 34$  см

### Задача 3

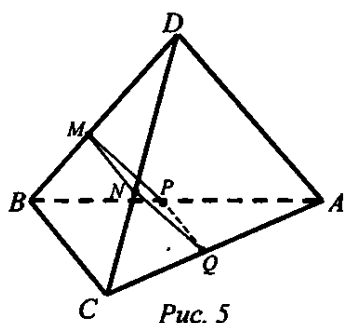


Рис. 5

Дано:  $M$  – середина  $BD$ ;  $N$  – середина  $CD$ ;  $Q$  – середина  $AC$ ;  $P$  – середина  $AB$ ;  $AD = 12$  см;  $BC = 14$  см (рис. 5).

Найти:  $P_{MNPQ}$  – ?

Решение:

1.  $MN \parallel BC$  по составу средней линии  $\Rightarrow MN \parallel PQ; PQ \parallel BC$ .

2.  $PM \parallel AD$  по составу средней линии  $\Rightarrow PM \parallel QN; NQ \parallel DA$ .

3. По определению  $MNPQ$  – параллелограмм.

4.  $PQ = 7; PM = 6 \Rightarrow P_{MNPQ} = 2(7 + 6) = 26$ .

(Ответ: 26 см.)

Решить задачу 3 при условии:  $AD = 9,5$  см,  $BC = 13,5$  см

Задача 4 Дано:  $\triangle ABC, \angle C = 90^\circ$ ,

$AC$  лежит в плоскости  $\alpha$ , угол между плоскостями  $\alpha$  и  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $AC = 5$  см,  $AB = 13$  см (рис. 4).

Найти: расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\alpha$ .

Решение: Построим  $BK \perp \alpha$ . Тогда  $KC$  – проекция  $BC$  на эту плос-

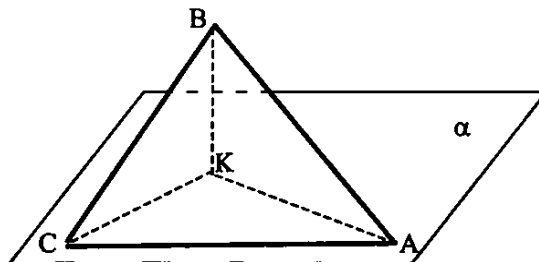


Рис. 4

кость.  $BC \perp AC$  по условию, значит, по теореме о трех перпендикулярах,  $KC \perp AC$ . Отсюда следует, что  $\angle BCK$  – линейный угол двугранного угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью треугольника  $\angle BCK = 60^\circ$ . Из  $\triangle BCA$  по теореме Пифагора:  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$  (см).

Из  $\triangle BKC$ :  $BK = BC \cdot \sin 60^\circ = \dots$

Ответ:  $BK = \dots$

### Контрольная работа №2 по теме: «Прямые и плоскости в пространстве»

<b>Вариант I</b>	<b>Вариант II</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>Прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются. Прямая <math>c</math> является скрещивающейся с прямой <math>a</math>. Могут ли прямые <math>b</math> и <math>c</math> быть параллельными?</li> <li>Плоскость <math>\alpha</math> проходит через середины боковых сторон <math>AB</math> и <math>CD</math> трапеции <math>ABCD</math> – точки <math>M</math> и <math>N</math>. <ol style="list-style-type: none"> <li>Докажите, что <math>AD \parallel \alpha</math>.</li> <li>Найдите <math>BC</math>, если <math>AD = 10</math> см, <math>MN = 8</math> см.</li> </ol> </li> <li>Прямая <math>MA</math> проходит через вершину квадрата <math>ABCD</math> и не лежит в плоскости квадрата. <ol style="list-style-type: none"> <li>Докажите, что <math>MA</math> и <math>BC</math> – скрещивающиеся прямые.</li> <li>Найдите угол между прямыми <math>MA</math> и <math>BC</math>, если <math>\angle MAD = 45^\circ</math></li> </ol> </li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются. Прямые <math>a</math> и <math>c</math> параллельны. Могут ли прямые <math>b</math> и <math>c</math> быть скрещивающимися?</li> <li>Плоскость <math>\alpha</math> проходит через основание <math>AD</math> трапеции <math>ABCD</math>. <math>M</math> и <math>N</math> – середины боковых сторон трапеции. <ol style="list-style-type: none"> <li>Докажите, что <math>MN \parallel \alpha</math>.</li> <li>Найдите <math>AD</math>, если <math>BC = 4</math> см, <math>MN = 6</math> см.</li> </ol> </li> <li>Прямая <math>CD</math> проходит через вершину треугольника <math>ABC</math> и не лежит в плоскости <math>ABC</math>. <math>E</math> и <math>F</math> – середины отрезков <math>AB</math> и <math>BC</math>. <ol style="list-style-type: none"> <li>Докажите, что <math>CD</math> и <math>EF</math> – скрещивающиеся прямые.</li> <li>Найдите угол между прямыми <math>CD</math> и <math>EF</math>, если <math>\angle DCA = 60^\circ</math>.</li> </ol> </li> </ol>

### 3.3. Задания для оценки освоения раздела 3 «Координаты и векторы»

#### Практическое занятие №7

#### Тема: «Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов»

**Цель:** закрепить понятие вектора в пространстве, знания формул: координат вектора и длины вектора, координат середины отрезка, скалярного произведения и косинуса угла между двумя векторами в пространстве, формировать навык применения теоретического материала при решении задач.

#### Теоретические сведения:

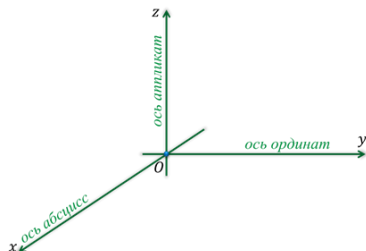
Расстояние между точками пространства  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  определяется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (11.4)$$

По этой же формуле определяются длина отрезка  $AB$  или модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

Координаты  $(x_{\text{ср}}; y_{\text{ср}}; z_{\text{ср}})$  середины отрезка определяются по формулам

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_{\text{ср}} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_{\text{ср}} = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (11.5)$$



Координаты вектора  $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$  находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1; \quad z = z_2 - z_1. \quad (11.6)$$

Тот факт, что вектор  $\overrightarrow{AB}$  имеет координаты  $(x; y; z)$ , может быть записан так:

$$\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, направленные вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Если точка лежит	
в некоторой координатной плоскости	
или на некоторой координатной оси,	
то её соответствующие координаты	
будут равны 0.	
$Oxy: z = 0$	$Ox: y = 0, z = 0$
$Oxz: y = 0$	$Oy: x = 0, z = 0$
$Oyz: x = 0$	$Oz: x = 0, y = 0$

Модуль вектора  $a(a_1; a_2; a_3)$ , заданного своими координатами, находится по формуле

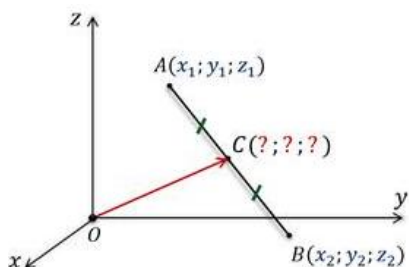
$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (11.7)$$

Пусть есть два вектора  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$  и  $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ , тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3); \quad (11.8)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3); \quad (11.9)$$

$$\lambda \vec{a} = \vec{k}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3). \quad (11.10)$$



Скалярным произведением  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (11.11)$$

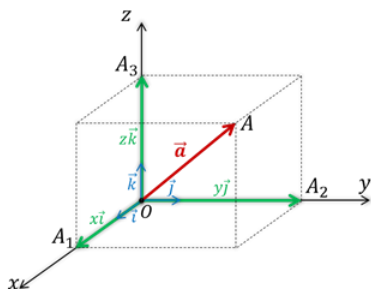
где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (11.12)$$

Косинус угла между векторами  $\vec{a}$  ( $a_1; a_2; a_3$ ) и  $\vec{b}$  ( $b_1; b_2; b_3$ ) определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (11.13)$$



### Содержание практической работы:

**Задание 1:** по координатам точек А и В найти длину вектора АВ.

а)  $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(1; -2; 3)$ ; б)  $A(-35; -17; 20)$ ,  $B(-34; -5; 8)$

$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

**Решение:**  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$a) A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \{1 - (-1); -2 - 0; 3 - 2\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{2; -2; 1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 3$$

**Задание 2:** Вычислить длины векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  и  $\vec{m}$ .

$$\vec{a} \{5; -1; 7\} \quad \vec{b} \{2\sqrt{3}; -6; 1\} \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \vec{d} = 2\vec{k}$$

$$\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

**Решение:**

$$\vec{a} \{5; -1; 7\}$$

$$a = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

**Задание 3:** По координатам точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  определить вид  $\triangle ABC$ .

$$a) A(9; 3; -5), B(2; 10; -5), C(2; 3; 2); \quad б) A(3; 7; -4), B(5; -3; 2), C(1; 3; -10)$$

**Решение:**

Зная координаты вершин треугольника, мы можем вычислить длины всех его

$$a) A(9; 3; -5), B(2; 10; -5), C(2; 3; 2)$$

$$AB = \sqrt{(2 - 9)^2 + (10 - 3)^2 + (-5 - (-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 0^2} = 7\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - 10)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{0^2 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2 - 9)^2 + (3 - 3)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC - \text{правильный}$$

сторон.

**Задание 4:**

Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} (2; 4; 1)$  и  $\vec{b} (3; 5; 7)$ .

**Решение:**



Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .  $\vec{a} (2; 3; -4), \vec{b} (1; -2; 1)$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = -8.$$

### Практическое занятие №8

#### Тема: «Координатная плоскость»

**Цель:** закрепить понятие вектора в пространстве, декартовой системы координат на плоскости и в пространстве, знания формул: координат вектора и длины вектора, координат середины отрезка, скалярного произведения и косинуса угла между двумя векторами в пространстве, формировать навык применения теоретического материала при решении задач.

#### Теоретические сведения (см пз № 7)

#### Содержание практической работы:

##### Задание 1:

Даны точки  $A (3; -1; 0)$ ,  $B (0; 0; -7)$ ,  $C (2; 0; 0)$ ,  $D (-4; 0; 3)$ ,  $E (0; -1; 0)$ ,  $F (1; 2; 3)$ ,  $G (0; 5; -7)$ ,  $H (-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$ . Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости  $Oxy$ ; д) плоскости  $Oyz$ ; е) плоскости  $Oxz$ ?

##### Задание 2:

Запишите координаты векторов:  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$ ,  $\vec{n} = 0,7\vec{k}$ .

##### Задание 3:

Даны векторы  $\vec{a} \{5; -1; 2\}$ ,  $\vec{b} \{-3; -1; 0\}$ ,  $\vec{c} \{0; -1; 0\}$ ,  $\vec{d} \{0; 0; 0\}$ . Запишите разложения этих векторов по координатным векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

##### Задание 4:

Коллинеарны ли векторы: а)  $\vec{a} \{3; 6; 8\}$  и  $\vec{b} \{6; 12; 16\}$ ; б)  $\vec{c} \{1; -1; 3\}$  и  $\vec{d} \{2; 3; 15\}$ ; в)  $\vec{i} \{1; 0; 0\}$  и  $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ ; г)  $\vec{m} \{0; 0; 0\}$  и  $\vec{n} \{5; 7; -3\}$ ; д)  $\vec{p} \left\{ \frac{1}{3}; -1; 5 \right\}$  и  $\vec{q} \{-1; -3; -15\}$ ?

##### Задание 5:

Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если: а)  $A (3; -1; 2)$ ,  $B (2; -1; 4)$ ; б)  $A (-2; 6; -2)$ ,  $B (3; -1; 0)$ ; в)  $A \left( 1; \frac{5}{6}; \frac{1}{2} \right)$ ,  $B \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right)$ .

##### Задание 6:

Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если: а)  $A (-1; 0; 2)$ ,  $B (1; -2; 3)$ ; б)  $A (-35; -17; 20)$ ,  $B (-34; -5; 8)$ .

##### Задание 7:

Найдите длины векторов:  $\vec{a} \{5; -1; 7\}$ ,  $\vec{b} \{2\sqrt{3}; -6; 1\}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  
 $\vec{d} = -2\vec{k}$ ,  $\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$ .

### Практическое занятие №9

#### Тема: «Вычисление расстояний и площадей на плоскости. Количественные расчеты»

**Цель:** закрепив понятие вектора в пространстве, декартовой системы координат на плоскости и в пространстве, а также знание основных формул темы «Координаты и векторы», формировать навык применения теоретического материала при осуществлении количественных расчетов.

#### Теоретические сведения (см пз №7)

#### Содержание практической работы:

##### Задание 1:

При каком значении  $x$  векторы  $\vec{a} (x; 3; 4)$  и  $\vec{b} (5; 6; 3)$  перпендикулярны?

##### Задание 2:

Найти координату  $z$  середины отрезка  $AB$ , где  $A (3; 5; 7)$ ,  $B (3; 1; -1)$ .

##### Задание 3:

Найти угол в градусах между векторами  $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ .

##### Задание 4:

Вычислите угол между векторами: а)  $\vec{a} \{2; -2; 0\}$  и  $\vec{b} \{3; 0; -3\}$ ;  
б)  $\vec{a} \{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$  и  $\vec{b} \{-3; -3; 0\}$ ; в)  $\vec{a} \{0; 5; 0\}$  и  $\vec{b} \{0; -\sqrt{3}; 1\}$ ;

##### Задание 5:

Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки  $A (1; -1; 3)$ ,  $B (3; -1; 1)$  и  $C (-1; 1; 3)$ .

### Контрольная работа №3 по теме: «Координаты и векторы»

#### Вариант 1

1. Точка  $A$  — середина отрезка  $МК$ . Найдите координаты точки  $A$  и длину отрезка  $МК$ , если  $M (5; -2; 1)$ ,  $K (3; 4; -3)$ .
2. Найдите координаты и длину вектора  $АС$ , если  $A (-3; 5; -7)$ ,  $C (6; 2; -1)$ .
3. Даны векторы  $\vec{a}(3; -2; -1)$  и  $\vec{b}(1; 2; 4)$ . Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
4. Даны векторы  $\vec{a}(2; -6; 8)$  и  $\vec{b}(-1; k; -4)$ . При каком значении  $k$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

- 1) коллинеарны;
- 2) перпендикулярны?
5. Определите принадлежность точек координатным осям и плоскостям: A (1;-20;0), B(0;0;8), C(0;-4;0), D(6;0;-40)

### Вариант 2

1. Точка М — середина отрезка АВ. Найдите координаты точки М и длину отрезка АВ, если A (6; -5; 2), B (-4; 3; 10).
2. Найдите координаты и длину вектора MD, если M (4; -6; 3), D (-2; 1; 5).
3. Даны векторы  $\vec{m}(2; -1; 3)$  и  $\vec{n}(-1; 2; 5)$ . Найдите косинус угла между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ .
4. Даны векторы  $\vec{m}(5; -4; 6)$  и  $\vec{n}(15; -12; p)$ . При каком значении p векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ :
  - 1) коллинеарны;
  - 2) перпендикулярны?
5. Определите принадлежность точек координатным осям и плоскостям: A (0;-50;0), B(0;0;3), C(7;-4;0), D(1;0;4)

### 3.4. Задания для оценки освоения раздела 4 «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

#### Практическое занятие №10

#### Тема: «Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения»

**Цель:** закрепить умение использовать основные тригонометрические тождества при упрощении выражений, доказательстве тригонометрических тождеств, учиться использованию формул приведения в получении тригонометрических функций острого угла, формировать навык применения теоретического материала в решении практических задач.

#### Теоретические сведения:

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in R. \quad (1)$$

$$2. \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

$$3. \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

$$4. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cos \alpha \neq 0. \quad (4)$$

$$5. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \sin \alpha \neq 0. \quad (5)$$

$$6. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \cos \alpha \neq 0. \quad (6)$$

$$7. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \sin \alpha \neq 0. \quad (7)$$

8. Из формул (4) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0. \quad (8)$$

9. Из формулы (8) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0. \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0. \quad (10)$$

10. Разделив обе части равенства (1) на  $\cos^2 \alpha$ , получим:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0). \quad (11)$$

11. Разделив обе части равенства (1) на  $\sin^2 \alpha$ , получим:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (\sin \alpha \neq 0). \quad (12)$$

### ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1. Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $2\pi \pm \alpha$ , выражаются через значения  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

2. Все формулы приведения можно свести в следующую таблицу:

Функция $\alpha$	Аргумент $\alpha$							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

3. Для облегчения запоминания приведенных формул нужно использовать следующие правила:

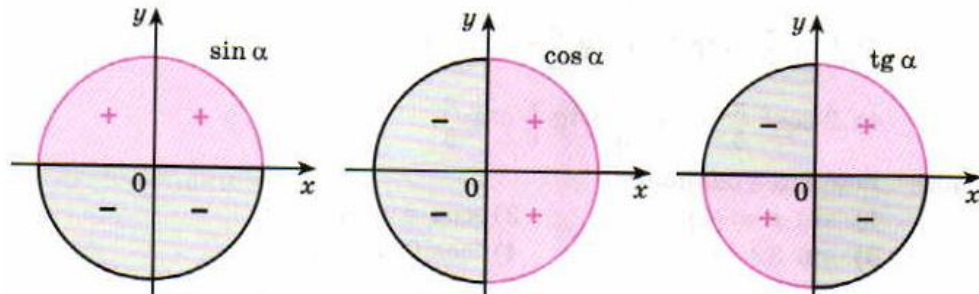
а) при переходе от функций углов  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  к функциям угла  $\alpha$  название функции изменяют: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

при переходе от функций углов  $\pi \pm \alpha$ ,  $2\pi \pm \alpha$  к функциям угла  $\alpha$  название функции сохраняют;

б) считая  $\alpha$  острым углом (т. е.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), перед функцией

угла  $\alpha$  ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ .

4. Исходя из известных значений тригонометрических функций некоторых углов (см. главу XIV), соответствия между градусной и радианной мерой величины угла и формул приведения, можно составить таблицу значений тригонометрических функций для наиболее часто встречающихся значений аргумента (см. ниже).



### Содержание практической работы:

#### Задание 1:

Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

- 1)  $40^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ ; 3)  $150^\circ$ ; 4)  $75^\circ$ ; 5)  $32^\circ$ ; 6)  $140^\circ$ .

#### Задание 2:

Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

- 1)  $\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\frac{\pi}{9}$ ; 3)  $\frac{3}{4}\pi$ ; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

#### Задание 3:

Вычислить  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \quad \triangleleft$$

Вычислить:

- 1)  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;  
2)  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

#### Задание 4:

Доказать тождество:

- 1)  $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$ ;  
2)  $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$ ;  
3)  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$ ; 4)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ;

#### Задание 5: Упростить с помощью формул приведения

- 1)  $\cos 150^\circ$ ; 2)  $\sin 135^\circ$ ; 3)  $\operatorname{ctg} 135^\circ$ ; 4)  $\cos 120^\circ$ ;  
5)  $\cos 225^\circ$ ; 6)  $\sin 210^\circ$ ; 7)  $\operatorname{ctg} 240^\circ$ ; 8)  $\sin 315^\circ$ .

1) 
$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)};$$

9)\*



## **Практическое занятие №11**

### **Тема: «Функции, их свойства. Способы задания функций»**

**Цель:** закрепить определение функции, основные свойства функций и способы задания функций, формировать навык применения теоретического материала в решении практических задач.

#### **Теоретические сведения:**

### ***ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ***

1. Зависимости одной переменной от другой называются функциональными зависимостями.
2. Зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$  называется функцией, если каждому значению  $x$  соответствует единственное значение  $y$ . При этом используют запись  $y = f(x)$ .
3. Переменную  $x$  называют независимой переменной или аргументом, а переменную  $y$  — зависимой переменной. Говорят, что  $y$  является функцией от  $x$ .
4. Значение  $y$ , соответствующее заданному значению  $x$ , называют значением функции.
5. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции; все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют множество значений функции.
6. Для функции  $f$  приняты обозначения:  $D(f)$  — область определения функции,  $E(f)$  — множество значений функции,  $f(x_0)$  — значение функции в точке  $x_0$ .

### ***СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ***

1. Функция может быть задана аналитически в виде формулы  $y = f(x)$ , где переменная  $x$  — элемент множества значений аргумента, а переменная  $y$  — соответствующее значение функции. Например, формула  $y = x^2$  определяет некоторую функцию, где каждому значению переменной  $x$ , взятому из области определения функции, соответствует единственное значение переменной  $y = x^2$ .
2. Функция  $f$  полностью определяется заданием множества пар  $(x; f(x))$ , где  $x$  принимает все значения из  $D(f)$ , а  $f(x)$  — соответствующие значения функции.
3. Функция может быть задана графически. Графиком функции  $y = f(x)$  называется изображение на координатной плоскости множества пар  $\{(x; y) | y = f(x), \text{ где } x \in D(f)\}$ .

### ***СВОЙСТВА ФУНКЦИИ***

#### **1. Монотонность.**

1. Функция  $f(x)$  называется возрастающей на данном числовом промежутке  $X$ , если большему значению аргумента  $x \in X$  соответствует большее значение функции  $f(x)$ , т. е. для любых  $x_1$  и  $x_2$  из промежутка  $X$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполнено неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$ .

2. Функция  $f(x)$  называется убывающей на данном числовом промежутке  $X$ , если большему значению аргумента  $x \in X$  соответствует меньшее значение функции  $f(x)$ , т. е. для любых  $x_1$  и  $x_2$  из промежутка  $X$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполнено неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ .

3. Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется монотонной на этом промежутке.

## 2. Четность (нечетность)

1. Функция  $y = f(x)$  называется четной, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки  $O$  (т. е. если точка  $a$  принадлежит области определения, то точка  $-a$  также принадлежит области определения);

2) для любого значения  $x$ , принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство  $f(x) = f(-x)$ .

2. Функция  $y = f(x)$  называется нечетной, если:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки  $O$ ;

2) для любого значения  $x$ , принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ .

## Содержание практической работы:

### Задание 1:

1. Функция задана формулой  $f(x) = -4x^2 + 13$ . Найдите:

а)  $f(5) = \dots\dots\dots$

б)  $f(-3) = \dots\dots\dots$

### Задание 2:

2. Функция задана формулой  $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ . Найдите:

$$g(-3) + g(1) = 2 \cdot (-3)^2 - 3(-3) + 1 + 2 - 3 + 1 = 28$$

а)  $g(0) + g(2) = \dots\dots\dots$

б)  $g(1) + g(-1) = \dots\dots\dots$

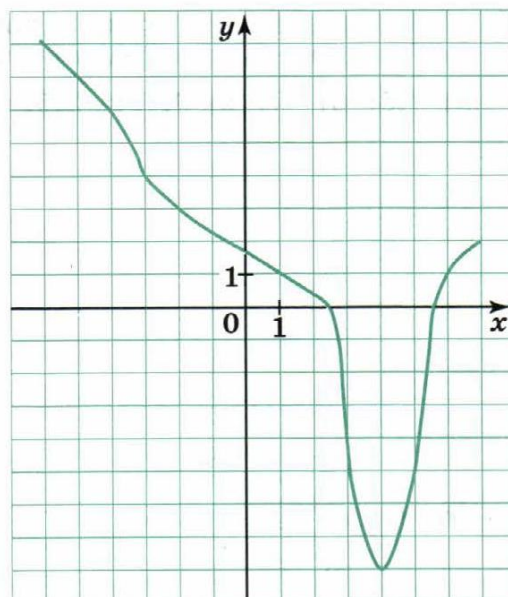
### Задание 3:

Установите четность или нечетность функции:

1)  $y = x^4$ ; 2)  $y = x^5$ ; 3)  $y = -2x^2$ ; 4)  $y = x^7 + 2x^3$ .

### Задание 4:

На рисунке изображён график функции  $f(x)$ , определённой на отрезке  $[-6; 7]$ . Используя график, закончите запись:



- а)  $f(-2) = \dots\dots\dots$   
 $f(1) = \dots\dots\dots$   
 $f(-3) = \dots\dots\dots$   
 $f(6) = \dots\dots\dots$   
 б)  $f(x) = 2$  при  $x = \dots\dots\dots$   
 $f(x) = 6$  при  $x = \dots\dots\dots$   
 $f(x) = 0$  при  $x = \dots\dots\dots$   
 $f(x) = -5$  при  $x = \dots\dots\dots$

### Задание 5:

Какова область определения функции, заданной формулой:

$$y = \frac{\sqrt{3x+6} + \sqrt{8-x}}{4x}; \quad \begin{cases} 3x+6 \geq 0, \\ 8-x \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq -6, \\ x \leq 8, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 8, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

**Ответ:**  $[-2; 0) \cup (0; 8]$ .

а)  $y = \frac{\sqrt{16-2x} - \sqrt{x-7}}{2x-15};$     б)  $y = \frac{\sqrt{17+x} - \sqrt{5-2x}}{3x-6}?$

## Практическое занятие №12

### Тема: «Преобразование графиков тригонометрических функций»

**Цель:** формировать умение применять геометрические преобразования при построении графиков тригонометрических функций, расширить представление о приемах построения графиков, обобщить все имеющиеся знания об элементарных функциях, их графиках, способах задания, функции, области определения и области значений.

### Теоретические сведения:

С помощью геометрических преобразований графика функции  $f(x)$  может быть построен график любой функции вида  $\pm k_1 \cdot f(\pm k_2 \cdot (x+a)) + b$ , где  $k_1 > 0, k_2 > 0$  – коэффициенты сжатия (при  $0 < k_1 < 1, 0 < k_2 < 1$ ) или растяжения (при  $k_1 > 1, k_2 > 1$ ) вдоль осей  $oy$  и  $ox$  соответственно, знаки «минус» перед коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  указывают на симметричное отображение графика



относительно координатных осей,  $a$  и  $b$  определяют сдвиг относительно осей абсцисс и ординат соответственно.

### Геометрические преобразования графика функции:

- Первый вид - масштабирование (сжатие или растяжение) вдоль осей абсцисс и ординат.  
На необходимость масштабирования указывают коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  отличные от единицы, если  $0 < k_1 < 1, 0 < k_2 < 1$ , то происходит сжатие графика относительно  $oy$  и растяжение относительно  $ox$ , если  $k_1 > 1, k_2 > 1$ , то производим растяжение вдоль оси ординат и сжатие вдоль оси абсцисс.
- Второй вид - симметричное (зеркальное) отображение относительно координатных осей.  
На необходимость этого преобразования указывают знаки «минус» перед коэффициентами  $k_1$  (в этом случае симметрично отображаем график относительно оси  $ox$ ) и  $k_2$  (в этом случае симметрично отображаем график относительно оси  $oy$ ). Если знаков «минус» нет, то этот шаг пропускается.
- Третий вид - параллельный перенос (сдвиг) вдоль осей  $ox$  и  $oy$ .  
Это преобразование производится **В ПОСЛЕДнюю ОЧЕРЕДЬ** при наличии коэффициентов  $a$  и  $b$ , отличных от нуля. При положительном  $a$  график сдвигается влево на  $|a|$  единиц, при отрицательных  $a$  – вправо на  $|a|$  единиц. При положительном  $b$  график функции параллельно переносим вверх на  $|b|$  единиц, при отрицательном  $b$  – вниз на  $|b|$  единиц.

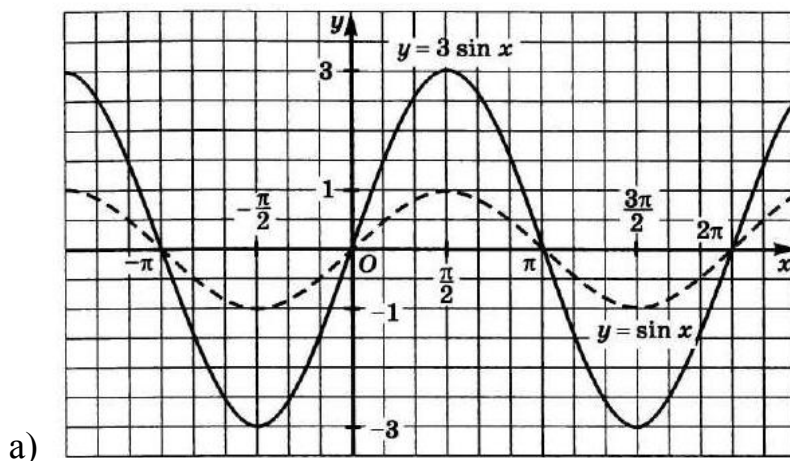
### Содержание практической работы:

#### Задание 1.

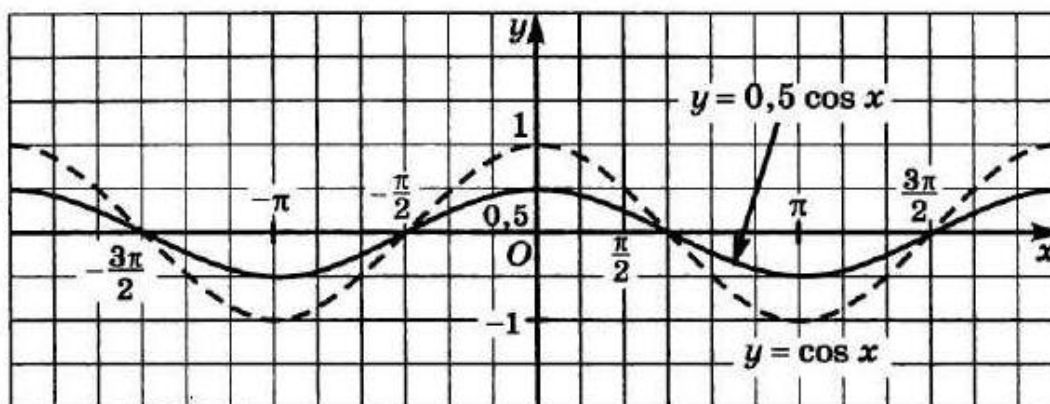
Выполнить построение графиков следующих тригонометрических функций:

а)  $y = \sin 3x$ ; б)  $y = 0,5 \sin x$ ; в)  $y = -1,5 \cos x$ ; г)  $y = \sin 2x$ ; д)  $y = -3 \sin(-2x)$

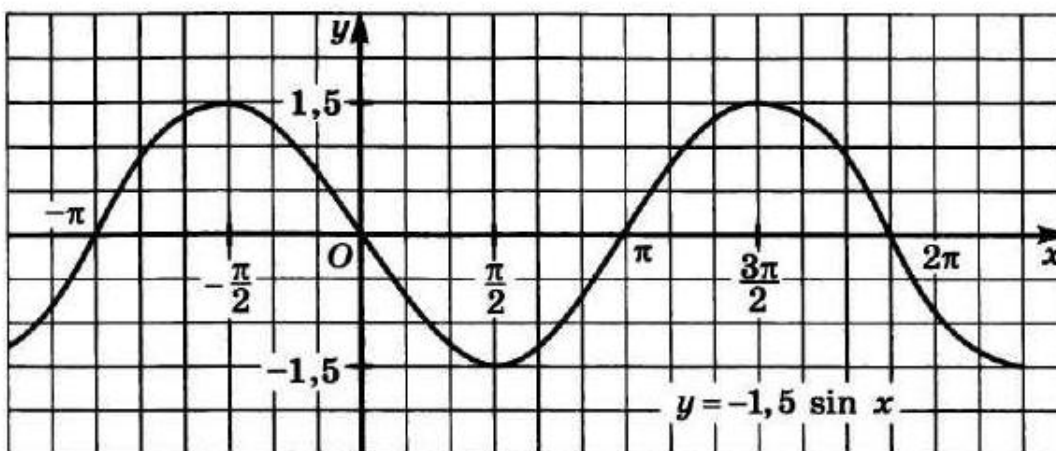
#### Примеры преобразований графиков тригонометрических функций:



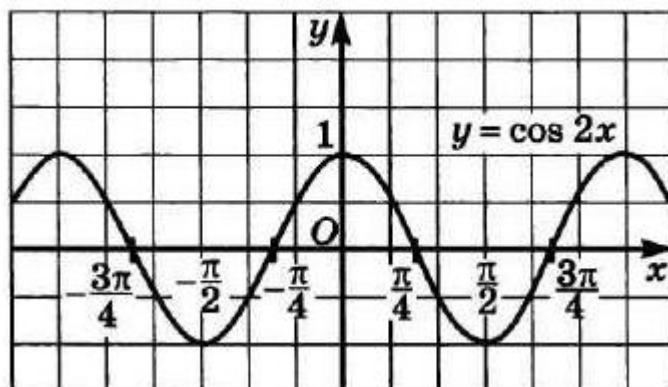
б)



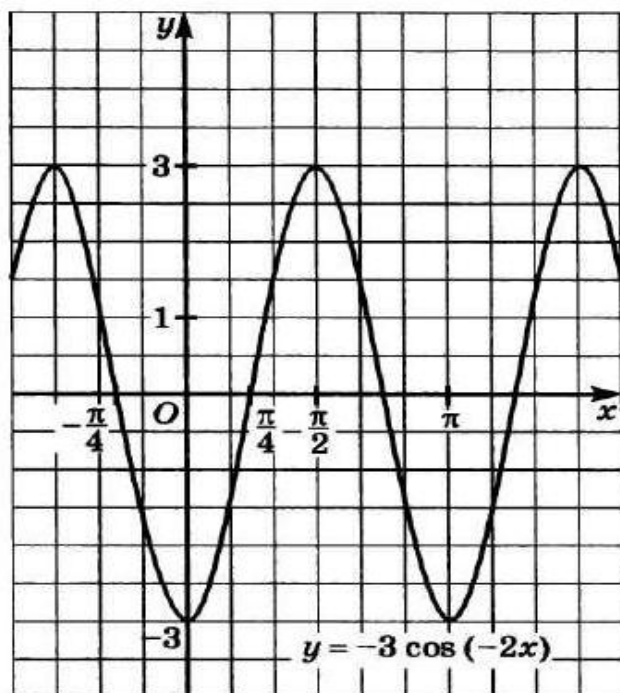
в)



г)



д)



### Практическое занятие №13

#### Тема: «Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах»

**Цель:** получить информацию о роли тригонометрии в математике и реальной жизни, об основных концепциях тригонометрии, об использовании тригонометрических функций в профессиональных задачах различных областей науки и жизни человека, совершенствовать навык самостоятельного получения и обработки информации.

#### Содержание практической работы:

##### Оформить отчет по следующему плану:

1. Роль тригонометрии в математике и её применение в реальной жизни.
2. Основные концепции тригонометрии.
3. Тригонометрические функции в физике: решение задач и определение неизвестных величин.
4. Тригонометрия и геометрия: взаимосвязь и применение.
5. Тригонометрические функции в архитектуре: расчеты и построения.
6. Тригонометрические функции в медицине: применение в рентгенологии и навигации.
7. Значимость тригонометрии в инженерных и технических расчетах.

*Каждый пункт плана раскрывается не менее чем 7-10 предложениями, на основании которых делается вывод по каждому разделу отчета. По желанию студентов формируется отчетная электронная презентация по материалам практической работы №13.*

В завершение ПЗ №13 необходимо просмотреть демонстрационный материал по теме практической работы (ссылка <https://www.youtube.com/watch?v=2QQrAbHreLY&t=403s>)

### **Практическое занятие №14**

#### **Тема: «Использование свойств тригонометрических функций в задачах практической направленности»**

**Цель:** получить информацию об использовании тригонометрических функций в профессиональных задачах различных областей науки и жизни человека, совершенствовать навыки применения полученных теоретических знаний о свойствах тригонометрических функций при решении прикладных задач.

#### **Примерные задания:**

##### **№1**

Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$  и  $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ .

**Решение.**

Поскольку угол альфа лежит в четвёртой четверти, его тангенс отрицателен. Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = -\sqrt{10 - 1} = -3.$$

Ответ: -3.

##### **№2**

Найдите  $3 \cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$  и  $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ .

**Решение.**

Поскольку угол  $\alpha$  лежит в четвертой четверти, его косинус положителен. Поэтому

$$3 \cos \alpha = 3 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = 1.$$

Ответ: 1.

### №3

Мяч бросили под углом  $\alpha$  к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком значении угла  $\alpha$  (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 30$  м/с? Считайте, что ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение.**

Задача сводится к решению уравнения  $t(\alpha) = 3$  на интервале  $(0^\circ; 90^\circ)$  при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin \alpha}{10} = 3 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow_{0^\circ < \alpha < 90^\circ} \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

### №4

При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 400$  нм на дифракционную решетку с периодом  $d$  нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол  $\varphi$  (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума  $k$  связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ . Под каким минимальным углом  $\varphi$  (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

**Решение.**

Задача сводится к решению неравенства  $d \leq 1600$  нм на интервале  $(0^\circ; 90^\circ)$  при заданных значениях длины волны света  $\lambda = 400$  нм и номера максимума  $k = 2$ :

$$\frac{k\lambda}{\sin \varphi} \leq 1600 \Leftrightarrow_{0^\circ < \varphi < 90^\circ} 1600 \sin \varphi \geq 800 \Leftrightarrow \sin \varphi \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow_{0^\circ < \varphi < 90^\circ} 30^\circ \leq \varphi < 90^\circ.$$

Значит, минимальный угол равняется  $30^\circ$ .

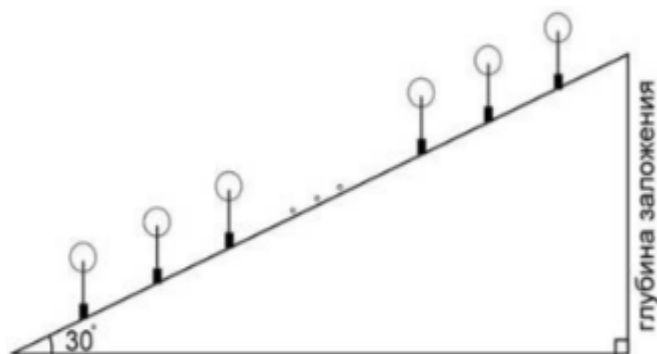
Ответ: 30.

## Содержание практической работы:

### **Задача 1**

Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$  и  $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

**Задача 2.** Угол наклона всех эскалаторов московского метро равен  $30$  градусам. Зная это, количество ламп на эскалаторе и примерное расстояние между лампами, можно вычислить примерную глубину заложения станции. На эскалаторе станции “Цветной бульвар”  $15$  ламп, а на станции “Пражская”  $2$  лампы. Рассчитайте, какова глубина заложения этих станций, если расстояния между лампами, от входа эскалатора до первой лампы и от последней лампы до выхода с эскалатора равны  $6$  м



### №3

Мяч бросили под углом  $\alpha$  к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком значении угла  $\alpha$  (в градусах) время полета составит 2,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 13$  м/с? Считайте, что ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

### №4

При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 710$  нм на дифракционную решётку с периодом  $d$  нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол  $\varphi$  (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума  $k$  связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ . Под каким минимальным углом  $\varphi$  (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом, не превосходящим 2840 нм?

## Контрольная работа №4 по теме: «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

### Вариант 1

#### №1

Изобразите схематично график функции  $y = 3 \cos x$

#### №2

Вычислить  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

#### №3

Используя формулы приведения, найдите значение выражения:

1)  $\sin 240^\circ$     2)  $\cos \frac{8\pi}{3}$     3)  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3}$

#### №4

1)  $\arcsin 1 - \arcsin (-1)$ ;    2)  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ;

$$3) 5 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) - 3 \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$4) 4 \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 6 \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

№5

Решите уравнение:

$$1) \cos x = 1;$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{5} \right) = -1;$$

$$4) \sin^2 x - 9 \sin x + 8 = 0$$

Вариант 2

№1

Изобразите схематично график функции  $y = \frac{1}{2} \sin x$

№2

Вычислить  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

№3

Используя формулы приведения, найдите значение выражения:

$$2) \sin 300^\circ \quad 2) \cos \frac{4\pi}{3} \quad 3) \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{3}$$

№4

$$1) \arcsin 1 - \arcsin (-1); \quad 2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$3) 5 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) - 3 \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$4) 4 \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 6 \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

№5

Решите уравнение:

- 1)  $\cos x = -1$ ;
- 2)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
- 3)  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ;
- 4)  $\operatorname{tg}^2 x - 9 \operatorname{tg} x + 8 = 0$

### 3.5. Задания для оценки освоения раздела 5 «Комплексные числа»

#### Практическое занятие №15

#### Тема: «Применение комплексных чисел»

**Цель:** закрепить понятие комплексного числа, алгебраической формы комплексного числа, учиться выполнять арифметические действия с комплексными числами, представленными в алгебраической форме, а также решать квадратные уравнения на множестве комплексных чисел, формировать представление о применении комплексных чисел в профессиональной деятельности.

#### Теоретические сведения:

Термин «комплексные числа» появился в 19 веке благодаря К. Гауссу. В переводе с латинского *complexus* обозначает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений. Ранее существовал термин «мнимые числа», предложенный в 17 веке французским математиком и философом Р. Декартом. Позднее в 18 веке для обозначения числа  $\sqrt{-1}$  (мнимая единица) Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire*.

Уникальные свойства комплексных чисел и функций нашли широкое применение для решения многих практических задач в различных областях математики, физики и техники: в обработке сигналов, теории управления, электромагнетизме, теории колебаний, теории упругости и многих других.

Комплексные числа также имеют много применений в различных областях науки и техники, таких как физика, электроника, астрономия, криптография и даже искусство. Например, комплексные числа используются для описания электрических сигналов, волновых функций атомов, фракталов и музыкальных гармоний.

**Комплексное число** – это выражение вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где  $x, y$  – действительные числа, а  $i = \sqrt{-1}$  – **мнимая единица**. Первое из



действительных чисел,  $x$ , называется **вещественной (действительной) частью** комплексного числа (используется обозначение  $x = \operatorname{Re} z$ ); второе,  $y$ , - **мнимой частью** ( $y = \operatorname{Im} z$ ). Выражение (1.1) называют **алгебраической формой записи комплексного числа**.

Числом, **сопряженным** к  $z = x + iy$ , называют число вида  $\bar{z} = x - iy$ . Используя формулу разности квадратов, получаем, что  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ . Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

**Пример 1. Решить уравнение**  $x^2 - 6x + 18 = 0$ .

**Решение.** Дискриминант данного уравнения:  $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$  меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Справедливы следующие **правила арифметических действий над комплексными числами**  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

1)  $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$  (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2)  $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$  (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что  $i^2 = -1$ );

3)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{z_2 \bar{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$  (эта операция

возможна только в случае, когда  $z_2 \neq 0 + i0 = 0$ ).

**Пример.** Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел  $z_1 = -9 - 7i$  и  $z_2 = -1 + i$  в алгебраической форме.

**Решение.**

$$\begin{aligned} \text{Сумма: } z_1 + z_2 &= -9 - 7i + -1 + i = \\ &= -9 + -1 + i - 7 + 1 = -10 - 6i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Разность: } z_1 - z_2 &= -9 - 7i - -1 + i = \\ &= -9 - -1 + i - 7 - 1 = -8 - 8i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Произведение: } z_1 z_2 &= -9 - 7i \cdot -1 + i = \\ &= 9 - 9i + 7i - 7i^2 = 16 - 2i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Частное: } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-9-7i}{-1+i} = \frac{-9-7i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{9+9i+7i+7i^2}{-1-i^2} = \\ &= \frac{2+16i}{2} = 1 + 8i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } z_1 + z_2 &= -10 - 6i, z_1 - z_2 = -8 - 8i, \\ z_1 z_2 &= 16 - 2i, \frac{z_1}{z_2} = 1 + 8i. \end{aligned}$$

### Содержание практической работы:

1. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:

#### 1 вариант

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - 7i, & z_2 &= 2 - i. \\ z_1 &= 2 + 6i, & z_2 &= -2 + i. \\ z_1 &= 4 + 2i, & z_2 &= -2 - i. \end{aligned}$$

#### 2 вариант

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 3i, & z_2 &= 3 + i. \\ z_1 &= 6 - 2i, & z_2 &= 3 - i. \\ z_1 &= 7 + 9i, & z_2 &= -3 + i \end{aligned}$$

2. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

#### 1 вариант

$$\text{а) } x^2 + 8 = 0. \qquad \text{б) } x^2 - 2x + 2 = 0$$

#### 2 вариант

$$\text{а) } x^2 + 9 = 0. \qquad \text{б) } 3x^2 - x + 1 = 0$$

3. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$\frac{-7+6i}{-4-5i} - \frac{-1-7i}{1-8i} + \frac{1-2i}{1-8i}$$

### 3.6. Задания для оценки освоения раздела 6 «Производная функции, её применение»

#### Практическое занятие №16

#### Тема: «Производные суммы, разности, произведения, частного»

**Цель:** закрепить знание формул производных основных элементарных функций, а также правила нахождения производных суммы, разности, произведения и частного двух функций, формировать навык решения практических задач по теме.

##### Теоретические сведения:

**Правило 1.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их сумма дифференцируема в этой точке и

$$(u + v)' = u' + v'.$$

**Коротко говорят:** *производная суммы равна сумме производных.*

**Правило 2.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их произведение дифференцируемо в этой точке и

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

**Следствие.** Если функция  $u$  дифференцируема в  $x_0$ , а  $C$  — постоянная, то функция  $Cu$  дифференцируема в этой точке и

$$(Cu)' = Cu'.$$

**Коротко говорят:** *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

**Правило 3.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$  и функция  $v$  не равна нулю в этой точке, то частное  $\frac{u}{v}$  также дифференцируемо в  $x_0$  и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

#### Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $y = C$	$y' = 0$	10. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
2. $y = x$	$y' = 1$	11. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
3. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	12. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	13. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = e^x$	$y' = e$	11. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
8. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
9. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$		

### Пример 1.

Найти производную функции  $f(x) = 5x^7$ .  $f'(x) = 5(x^7)' = 5 \cdot 7x^{7-1} = 35x^6$ .

### Пример 2.

Вычислить значение производной функции

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{2x + 5} \text{ при } x = 1.$$

Решение. 1) Полагая  $u = 3x^2 - x + 7$ , а  $v = 2x + 5$ , имеем

$$f(x) = \frac{u}{v}.$$

Вычислим отдельно производные функций  $u$  и  $v$ :

$$u' = (3x^2 - x + 7)' = 3 \cdot 2x - 1 = 6x - 1;$$

$$v' = (2x + 5)' = 2.$$

Подставляя найденные выражения в последнюю дробь, имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(6x-1)(2x+5) - (3x^2-x+7) \cdot 2}{(2x+5)^2} = \\ &= \frac{12x^2 - 2x + 30x - 5 - 6x^2 + 2x - 14}{(2x+5)^2} = \frac{6x^2 + 30x - 19}{(2x+5)^2}. \end{aligned}$$

2) Найдем значение производной при  $x = 1$ :

$$f'(1) = \frac{6 \cdot 1 + 30 \cdot 1 - 19}{(2 \cdot 1 + 5)^2} = \frac{17}{49}.$$

Ответ.  $\frac{17}{49}$ .

### Содержание практической работы:

Найти производные функций:

#### №1.

а)  $f(x) = x^2 + x^3$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$ ;

в)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ;

г)  $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ .

#### №2.

а)  $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$ ;

в)  $f(x) = x^2(3x + x^3)$ ;

г)  $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$ .

#### №3.

а)  $y = \frac{1+2x}{3-5x}$ ;    б)  $y = \frac{x^2}{2x-1}$ ;    в)  $y = \frac{3x-2}{5x+8}$ ;    г)  $y = \frac{3-4x}{x^2}$ .

### Практическое занятие №17

#### Тема: «Производная сложной функции»

**Цель:** закрепить знание формул производных основных элементарных функций, а также правила нахождения производных суммы, разности, произведения и частного двух функций, формировать навык нахождения производной композиции функций (сложной функции)

#### Теоретические сведения:

**Правило 1.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их сумма дифференцируема в этой точке и

$$(u + v)' = u' + v'.$$

**Коротко говорят:** *производная суммы равна сумме производных.*

**Правило 2.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их произведение дифференцируемо в этой точке и

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

**Следствие.** Если функция  $u$  дифференцируема в  $x_0$ , а  $C$  — постоянная, то функция  $Cu$  дифференцируема в этой точке и

$$(Cu)' = Cu'.$$

**Коротко говорят:** *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

**Правило 3.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$  и функция  $v$  не равна нулю в этой точке, то частное  $\frac{u}{v}$  также дифференцируемо в  $x_0$  и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

### Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $y = C$	$y' = 0$	10. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
2. $y = x$	$y' = 1$	11. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
3. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	12. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	13. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = e^x$	$y' = e$	11. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
8. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
9. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$		

### *Производная сложной функции*

Если  $y$  есть функция от  $u$ :  $y = f(u)$ , где  $u$  в свою очередь есть функция от аргумента  $x$ :  $u = \varphi(x)$ , т. е. если  $y$  зависит от  $x$  через промежуточный аргумент  $u$ , то  $y$  называется сложной функцией от  $x$  (функцией от функции):  $y = f(\varphi(x))$ .

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (4)$$

**Пример.** Найти производную функции  $y = (3 - 5x + x^2)^{101}$ .

**Решение.**  $y' = 101(3 - 5x + x^2)^{99} \cdot (3 - 5x + x^2)' =$   
 $= 101(3 - 5x + x^2)^{99} \cdot (-5 + 2x).$

### Содержание практической работы:

Найти производные функций:

#### №1.

а)  $f(x) = (2x - 7)^8$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{(5x + 1)^3}$

в)  $f(x) = (9x + 5)^4$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{(6x - 1)^5}$

#### №2.

а)  $f(x) = \left(3 - \frac{x}{2}\right)^{-9}$ ;

б)  $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1 - 2x)^4$ ;

в)  $f(x) = (4 - 1,5x)^{10}$ ;

г)  $f(x) = (5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6}$ .

#### №3.

а)  $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \frac{1}{x^2 + 3}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$ ;

г)  $f(x) = (3 - x^3)^5 + \sqrt{2x - 7}$ .

### Практическое занятие №18

#### Тема: «Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов»

**Цель:** закрепить понятие и свойства непрерывности функции в точке и на промежутке, формировать умение использовать метод интервалов для решения рациональных неравенств различного уровня сложности.

#### Теоретические сведения:

- Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , то функцию  $f(x)$  называют непрерывной в точке  $x_0$ .
- Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то ее называют непрерывной на этом промежутке.
- График функции на этом промежутке представляет собой непрерывную линию, о которой говорят, что ее можно «нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

## Свойство непрерывных функций.

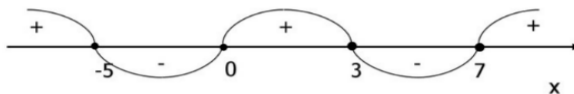
- Если на интервале  $(a ; b)$  функция непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.
- На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

**Метод интервалов** — это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида  $f(x) > 0$  и  $f(x) < 0$ . Алгоритм состоит из 4 шагов:

- 1.** Решить уравнение  $f(x) = 0$ . Таким образом, вместо неравенства получаем уравнение, которое решается намного проще;
- 2.** Отметить все полученные корни на координатной прямой. Таким образом, прямая разделится на несколько интервалов;
- 3.** Выяснить знак (плюс или минус) функции  $f(x)$  на самом правом интервале. Для этого достаточно подставить в  $f(x)$  любое число, которое будет правее всех отмеченных корней;
- 4.** Отметить знаки на остальных интервалах. Для этого достаточно запомнить, что при переходе через каждый корень знак меняется.

$$x(x-3)(x+5)(x-7) \geq 0$$

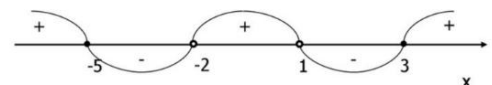
Нули функции  
 $x=0$ ;  $x=3$ ;  $x=-5$ ;  $x=7$



Ответ:  $x \in (-\infty; -5] \cup [0; 3] \cup [7; \infty)$

$$\frac{(x-3)(x+5)}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

Нули функции  $x=3$ ;  $x=-5$       Функция не существует  
 $x=-2$ ;  $x=1$



Ответ:  $x \in [-5; -2) \cup (1; 3]$

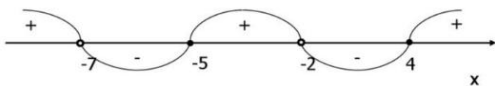


$$\frac{(4-x)(x+5)}{(2+x)(x+7)} \leq 0$$

$$\frac{(x-4)(x+5)}{(x+2)(x+7)} \geq 0$$

Нули функции  
 $x=4; x=-5$

Функция не существует  
 $x=-2; x=-7$



Ответ:  $x \in (-\infty; -7) \cup [-5; -2) \cup [4; \infty)$

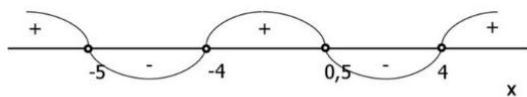
$$x^5(x-6)^3(x+2)^4(x-3)^2 > 0$$

$$\frac{(2x-8)(3x+15)}{(3x+12)(2x-1)} < 0$$

$$\frac{(x-4)(x+5)}{(x+4)(x-0,5)} < 0$$

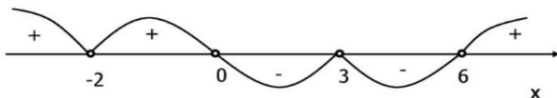
Нули функции  
 $x=4; x=-5$

Функция не существует  
 $x=-4; x=0,5$



Ответ:  $x \in (-5; -4) \cup (0,5; 4)$

Нули функции  
 $x=0; x=6; x=-2; x=3$

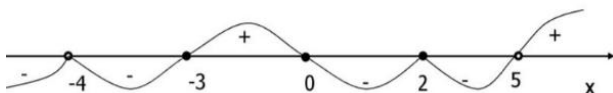


Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (6; \infty)$

$$\frac{x(x-2)^2(x+3)^3}{(x+4)^4(x-5)} \leq 0$$

Нули функции  
 $x=0; x=2; x=-3$

Функция не существует  
 $x=-4; x=5$



Ответ:  $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 3] \cup [0; 5)$

### Содержание практической работы:

Решить рациональные неравенства методом интервалов №№ 1-7:

$$(x-1)(x+1) \leq 0.$$

$$\frac{x-4}{x-2} \leq 0.$$

$$\frac{x}{x-3} \leq 0.$$

$$x^2(x-1)(x+2) \leq 0.$$

$$-x^2-5x+6 \geq 0.$$

$$3x^2-7x+2 < 0.$$

$$x^2(3-x)(x+1) > 0.$$

## Практическое занятие №19

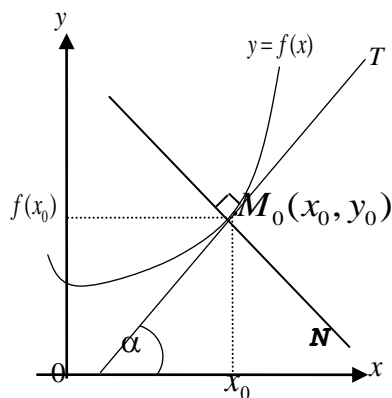
### Тема: «Геометрический и физический смысл производной»

**Цель:** закрепить знание геометрического и физического смыслов производной функции, отработав алгоритм нахождения касательной к графику функции в точке, а также умение вычислять мгновенную скорость материальной точки в определенный момент времени как производную закона движения этой точки.

### Теоретические сведения:

#### Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $y = C$	$y' = 0$	10. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
2. $y = x$	$y' = 1$	11. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
3. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	12. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	13. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = e^x$	$y' = e$	11. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
8. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
9. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$		



#### Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , то  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$  — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ( $K = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ ).

Уравнение касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (прямая  $M_0T$ ) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

### Физический смысл производной:

Если положение точки при её движении задаётся функцией пути  $S(t)$ , где  $t$  – время движения, то производная функции  $S$  есть мгновенная скорость движения в момент времени  $t$ :  $v(t)=S'(t)$ . Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени  $t$ . А производная этой функции называется ускорением движения:

$$a = v'(t).$$

### Примеры заданий:

■ Пример 1. Найдём уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  в точке с абсциссой 2.

В этом примере  $x_0 = 2$ ,  $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ,  $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$ . Подставляя эти числа в уравнение (1), получаем уравнение  $y = 1 + 4(x - 2)$ , т. е.  $y = 4x - 7$ .

### Пример

2.

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$  (где  $x$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

### Решение:

Найдём закон изменения скорости:  $v(t) = x'(t) = t^2 - 6t - 5$  м/с. Чтобы найти, в какой момент времени  $t$  скорость была равна 2 м/с, решим уравнение:

$$t_1 = -1 \text{ не подходит, т.к. } t > 0$$

$$t^2 - 6t - 5 = 2 \quad t_2 = 7$$

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \quad \text{Ответ: 7 секунд}$$

### Содержание практической работы:

#### №1

Напишите уравнение касательной к графику функции  $f$  в точке с абсциссой  $x_0$

а)  $f(x) = \frac{3}{x}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $x_0 = 1$ ;

б)  $f(x) = 2x - x^2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 2$ ;

в)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$ ;

г)  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $x_0 = -1$ ,  $x_0 = 2$ .

## №2

а)

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = t^3 - 4t^2$ . Найдите скорость и ускорение в момент  $t = 5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

б)

Вращение тела вокруг оси совершается по закону  $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ . Найдите угловую скорость  $\omega(t)$  в произвольный момент времени  $t$  и при  $t = 4$  с. ( $\varphi(t)$  — угол в радианах,  $\omega(t)$  — скорость в радианах в секунду,  $t$  — время в секундах.)

## Практическое занятие №20

### Тема: «Физический смысл производной в профессиональных задачах»

**Цель:** получить информацию о физическом смысле производной в математике и реальной жизни, об основных концепциях дифференцирования, об использовании физического (механического) смысла производной в профессиональных задачах различных областей науки и жизни человека, совершенствовать навык самостоятельного получения и обработки информации.

### Содержание практической работы:

#### Оформить отчет по следующему плану:

8. Роль производной в математике и её применение в реальной жизни.
9. Основные концепции дифференцирования.
10. Примеры задач ЕГЭ на применение физического смысла производной.
11. Физический (механический) смысл производной в решении практических профессиональных задач (ссылка <https://xn--24-6kcaa2awqnc8dd.xn--plai/fizicheskij-smysl-proizvodnoj.html>)

*Каждый пункт плана раскрывается не менее, чем 7-10 предложениями, на основании которых делается вывод по каждому разделу отчета.*

*По желанию студентов формируется отчетная электронная презентация по материалам практической работы №20.*

В завершение ПР №20 необходимо просмотреть демонстрационный материал по теме практической работы (ссылки <https://www.youtube.com/watch?v=2ksqIsVvEQc> , <https://www.youtube.com/watch?v=usifq6Ds3x4>)

## Практическое занятие №21

### Тема: «Наименьшее и наибольшее значения функции»

**Цель:** закрепить алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, формировать навык решения практических заданий по теме занятия.

#### Теоретические сведения:

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

- 1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
- 2) найти значения функции на концах промежутка;
- 3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

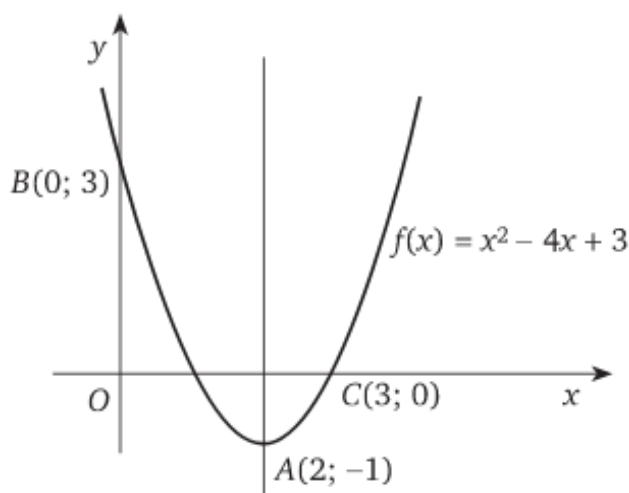
#### Примеры упражнений с решениями:

##### №1

Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  в промежутке  $0 \leq x \leq 3$ .

○ Имеем  $f'(x) = 2x - 4$ ;  $2x - 4 = 0$ , т. е.  $x = 2$  — критическая точка. Находим  $f(2) = -1$ ; далее вычисляем значения функции на концах промежутка:  $f(0) = 3$ ,  $f(3) = 0$ .

Итак, наименьшее значение функции равно  $-1$  и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно  $3$  и достигается на левом конце промежутка (при



##### №2

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$  на промежутке: а)  $[-2; -0,5]$ ; б)  $[1; 3]$ .

**Решение.** Находим критические точки функции. Так как  $y'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$ , то имеются две критические точки:  $x=0$  и  $x=-1$ .

а) В промежутке  $[-2; -0,5]$  лежит одна из критических точек:  $x=-1$ . Так как  $y(-2)=8$ ,  $y(-1)=3$ ,  $y(-0,5)=3,5$ , то наименьшее значение функции  $y(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$  достигается в точке  $x=-1$  и равно 3, а наибольшее — в точке  $x=-2$  и равно 8. Кратко это можно записать так:

$$\min_{[-2; -0,5]} y(x) = y(-1) = 3, \quad \max_{[-2; -0,5]} y(x) = y(-2) = 8.$$

б) В промежутке  $[1; 3]$  данная функция убывает. Поэтому  $\max_{[1; 3]} y(x) = y(1) = -1$ . Наименьшего значения в промежутке  $[1; 3]$  функция не достигает, так как точка  $x=3$  не принадлежит этому промежутку.

### Содержание практической работы:

#### №1

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:  
1)  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  на отрезке: а)  $[-1; 1]$ ; б)  $[0; 3]$ ;

#### №2

1)  $f(x) = x^2 - 6x + 13$ ,  $0 \leq x \leq 6$ ; 2)  $f(x) = 8 - 0,5x^2$ ,  $-2 \leq x \leq 2$

#### №3

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ ,  $-4 \leq x \leq 4$ ; 2)  $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .

### Практическое занятие №22

**Тема:** «Нахождение оптимального результата в задачах на наибольшее и наименьшее значения функции»

**Цель:** закрепить алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, познакомить с примерами задач на оптимум, формировать навык решения практических заданий по теме занятия.

### Теоретические сведения:

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

- 1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
- 2) найти значения функции на концах промежутка;
- 3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

**Содержание практической работы:**

**№1**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x + \frac{3}{2}$  на отрезке  $[-1; 2]$ .

**Решение.** Функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка.

- 1) Найдем значение функции на концах отрезка  $[-1; 2]$ :

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{2} - 2(-1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4;$$

$$f(2) = \frac{2^4}{2} - 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} = 8 - 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

- 2) Далее, найдем производную данной функции и приравняем ее нулю:

$$f'(x) = \left( \frac{x^4}{2} - 2x + \frac{3}{2} \right)' = \frac{4x^3}{2} - 2 = 2x^3 - 2,$$

$$2x^3 - 2 = 0, \quad x^3 - 1 = 0, \quad x = 1.$$

- 3) Вычислим значение заданной функции в этой точке  $x = 1$ :

$$f(1) = \frac{1^4}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} = 0.$$

Наибольшее значение функции равно  $\frac{11}{2}$  при  $x = 2$ , а наименьшее равно 0 при  $x = 1$  (на  $[-1; 2]$ ).

$$\text{О т в е т } f_{\max} = \frac{11}{2}; \quad f_{\min} = 0.$$

**Решить данную задачу на отрезке  $[-2; 3]$**

## №2

Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найти эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых  $x$  и  $y$ , т. е.

$$86 = x + y. \quad (*)$$

По условию задачи произведение этих слагаемых  $xy$  должно быть максимально. Обозначим  $g(x; y) = xy$  и будем искать максимум функции  $g(x; y)$ . Эта функция зависит от двух переменных  $x$  и  $y$ , однако, используя соотношение (\*), ее можно представить в виде функции лишь от одной переменной  $x$ :

$$g(x; y) = x \cdot y = x(86 - x) = 86x - x^2 = f(x).$$

Теперь легко найти значение  $x$ , при котором функция  $f(x)$  достигает максимума. Найдем производную  $f'(x)$  и приравняем ее нулю:

$$f'(x) = (86x - x^2)' = 86 - 2x = 2(43 - x),$$

$$2(43 - x) = 0, \quad x = 43.$$

Определим второе слагаемое:  $y = 86 - x = 86 - 43 = 43$ .

О т в е т.  $x = 43$ ;  $y = 43$ .

Решить данную задачу для заданного числа 64.

## Практическое занятие №23

Тема: «Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции»

**Цель:** закрепить алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, формировать устойчивый навык самостоятельного решения различных задач на оптимум.

Теоретические сведения:



Самыми важными в практической деятельности человека являются задачи о рациональном использовании средств и получении наибольшей прибыли.

Эти задачи имеют общее название — **задачи на оптимизацию** (от латинского слова optimum — «наилучший»). При решении этих задач используется математическое моделирование. Сначала строится математическая модель задачи, затем выполняется работа с этой моделью, в заключении даётся ответ на вопрос задачи.

Рассмотрим каждый этап решения задачи на оптимизацию подробнее.

**Первый этап.** Составление математической модели.

1. Назовём величину в условии задачи, наибольшее или наименьшее значение которой нужно найти, оптимизируемой величиной (в дальнейшем будем использовать сокращение: **О. В.**). Обозначаем её буквой **y** или иной буквой (**S, V, R, t** — смотрим по условию).
2. Выбираем в условии задачи независимую переменную, через которую можно выразить **О. В.** Эту независимую переменную обозначаем буквой **x** (или другой буквой). В соответствии с условиями задачи определяем границы для значений независимой переменной. Это будет область определения для искомой **О. В.**
3. Выражаем **y** через **x** и получаем функцию **y = f(x)** с найденной в шаге 2 областью определения **X**. Получена математическая модель задачи.

**Второй этап.** Работа с математической моделью.

Для функции **y = f(x), x ∈ X**, находим **y<sub>наим</sub>** или **y<sub>наиб</sub>**, исходя из условия задачи. При этом используются теоретическая база, заданная в первом пункте.

Полност

Для функции **y = f(x), x ∈ X**, находим **y<sub>наим</sub>** или **y<sub>наиб</sub>**, исходя из условия задачи. При этом используются теоретическая база, заданная в первом пункте.

**Третий этап.** Ответ на вопрос задачи.

Даётся чёткий ответ на вопрос задачи, основываясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

## Пример:

необходимо установить забор для дачного участка прямоугольной формы длиной **120 м**. Найдите размеры данного участка, если известно, что его площадь является наибольшей.

Решение. **Первый этап.** Составление математической модели.

1. Площадь дачного участка является оптимизируемой величиной (О. В.), т. к. в задаче необходимо найти размеры участка при его наибольшей площади. Введём обозначение: О. В. будет **S**.
2. Площадь участка прямоугольной формы зависит от длины и ширины прямоугольника. Пусть независимой переменной (Н. П.) будет длина балки, обозначим её через **a**.
3. Ширина **b** прямоугольника связана с его длиной и периметром:  $2 \cdot (a + b) = P$  (формула периметра прямоугольника). Значит,  $b = \frac{1}{2} \cdot P - a$ .

Площадь прямоугольника  $S$  вычисляется по формуле:  $S = ab$ .

$$S = a\left(\frac{1}{2} \cdot P - a\right).$$

Математическая модель задачи составлена.

**Второй этап.** Работа с математической моделью.

На этом этапе для функции  $S = a\left(\frac{1}{2} \cdot P - a\right)$ , надо найти  $S_{\text{наиб}}$ .

Получили:

$$S = a\left(\frac{1}{2}P - a\right);$$

$$S = \frac{1}{2}Pa - a^2;$$

$$S' = \frac{1}{2}P - 2a.$$

Критических точек нет. Найдём стационарные точки. Приравняв производную к нулю, получим:

$$\frac{1}{2}P - 2a = 0;$$

$$2a = \frac{1}{2}P; a = \frac{1}{4}P.$$

$a = \frac{1}{4}P$  — точка максимума функции. Значит, по теореме из пункта 1.

**Третий этап.** Ответ на вопрос задачи.

В задаче спрашивается, какие размеры должен иметь участок при наибольшей площади. Мы определили, что

длина  $a$  участка, равна  $\frac{1}{4}P = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30$  м. Найдём ширину участка:

$$b = \frac{1}{2} \cdot P - a;$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot 120 - 30 = 30.$$

**Ответ:** размер участка при наибольшей его площади составляет  $30 \times 30$  м.

### Содержание практической работы:

#### №1

Каковы должны быть стороны прямоугольного участка, периметр которого 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

#### №2

Прямоугольный участок земли площадью 4 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы периметр был наименьшим?

#### №3

Число 48 представлено в виде суммы двух слагаемых, так, что их произведение максимально. Найти эти слагаемые.

№4(\*)

Найти число, которое превышало бы свой утроенный квадрат на максимальное значение.

Контрольная работа №5 по теме: «Производная функции, её применение»

Вариант 1.

1. Найдите производную функции:

а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{x}$ ; б)  $y = -\frac{1}{6}x^3 + 6\sqrt{x}$ ; в)  $y = 4x^2 + \cos x$

2. Вычислите  $f'(-2)$ , если  $f(x) = -x^3 + \frac{1}{4}x^2$

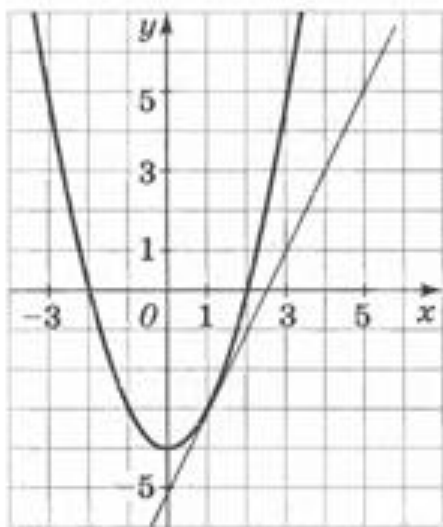
3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции :

$y = 2 + \operatorname{ctg} x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$

4. Точка движется по координатной прямой по закону

$x(t) = 3t^3 - 2t^2 - 7$ , где  $x(t)$  - координата точки (в метрах) в момент времени  $t$  (в секундах). Найдите скорость точки через 3 с после начала движения.

5. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ . Найдите  $f'(x_0)$ .



6. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^2 - 4x - 1$  в точке с абсциссой  $x_0 = -3$ .

7. Найдите производную функции:

$y = -3 \cos(8 - 2x)$ .

8. Напишите правило нахождения производной частного, используя функции  $m(q)$  и  $p(n)$ .

**Вариант 2.**

1. Найдите производную функции:

а)  $y = \frac{1}{9}x^6 - \frac{7}{x}$ ; б)  $y = 5x^3 + 2\sqrt{x}$ ; в)  $y = -3x^3 - 2\cos x$

2. Вычислите  $f'(-2)$ , если  $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

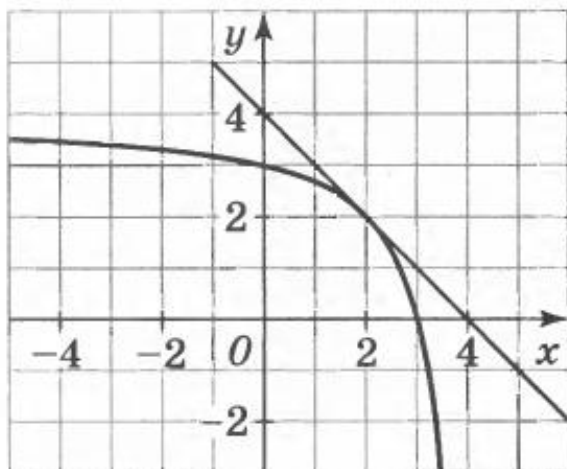
3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции:

$y = 3 - 2 \operatorname{tg} x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4. Точка движется по координатной прямой по закону

$x(t) = t^3 - 2t^2 + t - 41$ , где  $x(t)$  - координата точки (в метрах) в момент времени  $t$  (в секундах). Найдите скорость точки через 2 с после начала движения.

5. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ . Найдите  $f'(x_0)$ .



6. Составьте уравнение касательной к графику функции

$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ , в точке с абсциссой  $x_0 = -4$ .

7. Найдите производную функции:  $y = 4 \sin(2 - 3x)$ .

8. Напишите правило нахождения производной произведения, используя функции  $w(p)$  и  $q(m)$ .

**Срезовая контрольная работа за 1 полугодие 2024-2025 уч. года**

Срезовая контрольная работа за 1 полугодие 1 курса соответствует рабочей программе общеобразовательной профильной учебной дисциплины ОД.3 «Математика», предназначенной для изучения математики при реализации программы среднего общего образования в пределах освоения образовательной

программы СПО по специальности 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

Контролируемые разделы и темы приведены в таблице и включают учебный материал, изучаемый в 1 полугодии 1 курса.

№ п/п	Наименование разделов, тем, изучаемых в течение 1 полугодия 2024 – 2025 уч.года	По программе	Фактически дано
1	<b>Раздел 1. Повторение курса математики основной школы</b>	<b><u>14</u></b>	
2	<b>Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве</b>	<b><u>14</u></b>	
3	<b>Раздел 3. Координаты и векторы</b>	<b><u>10</u></b>	
4	<b>Раздел 4. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции</b>	<b><u>26</u></b>	
5	<b>Раздел 5. Комплексные числа</b>	<b><u>4</u></b>	
6	<b>Раздел 6. Производная функции, ее применение</b>	<b><u>28</u></b>	
6.1	<b>Тема 6.1</b> Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования	2	
6.2	<b>Тема 6.2</b> Производные суммы, разности произведения, частного	2	
6.3	<b>Тема 6.3</b> Производные тригонометрических функций. Производная сложной функции	4	
6.4	<b>Тема 6.4</b> Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов	2	
6.5	<b>Тема 6.5</b> Геометрический и физический смысл производной	2	
6.6	<b>Тема 6.6</b> Физический смысл производной в профессиональных задачах	2	
6.7	<b>Тема 6.7</b> Монотонность функции. Точки экстремума	2	
6.8	<b>Тема 6.8</b> Исследование функций и построение графиков	2	
6.9	<b>Тема 6.9</b> Наибольшее и наименьшее значения функции	2	

6.10	<b>Тема 6.10</b> Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах	<b>6</b>	
	Наименьшее и наибольшее значение функции	2	
	Нахождение оптимального результата в задачах на наибольшее и наименьшее значения функции	2	

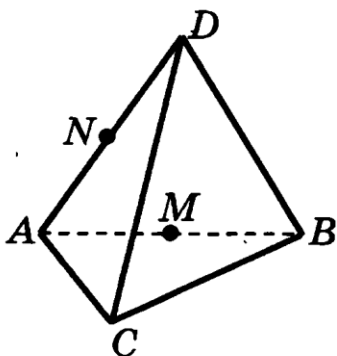
**Срезовая контрольная работа рассчитана на 45 минут.**

**1 вариант**

**Часть 1**

**№1**

Точки М и N являются серединами ребер АВ и AD пирамиды DABC. По какой прямой пересекаются плоскости BCM и CDN?



- 1) AD    2) AC    3) AB    4) MN

**№2**

Найти координаты и длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если A (-1; 0; 2), B (1; -2; 3)

**№3**

Вычислить  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

**№4**

Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:  $z_1 = 3 - 7i$ ,  $z_2 = 2 - i$

**№5**

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = t^3 - 4t^2$ . Найдите скорость и ускорение в момент  $t = 3$  с. (Перемещение измеряется в метрах)

**Часть 2**

**№6**

Решите уравнение  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

**№7**

Исследовать функцию на четность  $y = \frac{x^2}{x-1}$

№8

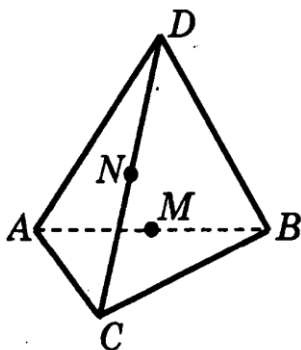
Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  на отрезке  $[-1; 1]$

2 вариант

Часть 1

№1

Точки М и N являются серединами ребер АВ и CD пирамиды DABC. По какой прямой пересекаются плоскости BDM и BCN?



- 1) AB      2) BD      3) MN      4) CD

№2

Найти координаты и длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если А (-35; -17; 20), В (-34; -5; 8)

№3

Вычислить  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

№4

Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:  $z_1 = 2 + 6i$ ,  $z_2 = -2 + i$

№5

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = t^3 - 4t^2$ . Найдите скорость и ускорение в момент  $t = 5$  с. (Перемещение измеряется в метрах)

Часть 2

№6

Решите уравнение  $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

№7

Исследовать функцию на четность  $y = \frac{x}{x-1}$

№8

Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  на отрезке  $[0; 3]$

**Общее количество баллов за срезовую контрольную работу – 20**

**Критерии оценки:**

«5»-работа выполнена на 90-100% (18-20 баллов)

«4»-работа выполнена на 75-85% (15 – 17 баллов)

«3»-работа выполнена на 55-70% (11 – 14 баллов)

«2»-работа выполнена на 50 и менее % (0 – 10 баллов)

**3.7. Задания для оценки освоения раздела 7 «Многогранники и тела вращения»**

**Практическое занятие №24**

**Тема: «Симметрия в природе, архитектуре, технике, искусстве»**

**Цель:** получить информацию об использовании симметрии в природе, архитектуре, технике, искусстве, на примерах найти и показать симметрию как основу красоты в природе, технике, архитектуре и искусстве, совершенствовать навык самостоятельного получения и обработки информации.

**Содержание практической работы:**

**Оформить отчет (с использованием иллюстративного материала) по следующему плану:**

- 1) Симметрия в природе.
- 2) Симметрия в архитектуре.
- 3) Симметрия в технике.
- 4) Симметрия в искусстве.
- 5) Заключение по теме практической работы № 24.

*Каждый пункт плана раскрывается не менее чем 7-10 предложениями, на основании которых делается вывод по каждому разделу отчета.*

*По желанию студентов формируется отчетная электронная презентация по материалам практической работы №24.*

В завершение ПР №24 (для раскрытия пункта 5 плана) необходимо просмотреть демонстрационный материал по теме практической работы (ссылки <https://www.youtube.com/watch?v=9dH1eECAB2o>  
<https://www.youtube.com/shorts/NylEnuMf8Rs>  
<https://www.youtube.com/watch?v=MF173HIVscA>)



## **Практическое занятие №25**

### **Тема: «Симметрия в быту»**

**Цель:** получить информацию об использовании симметрии в быту, в целом, в повседневной жизни людей, на примерах найти и показать симметрию как основу красоты и соразмерности во всех аспектах человеческой жизни, совершенствовать навык самостоятельного получения и обработки информации.

### **Содержание практической работы:**

**Оформить отчет (с использованием иллюстративного материала) по следующему плану:**

- 1) Определение симметрии.
- 2) Центральная симметрия.
- 3) Осевая симметрия.
- 4) Симметрия относительно плоскости.
- 5) Симметрия вращения.
- 6) Человек – существо симметричное?
- 7) Примеры использования симметрии в быту и повседневной жизни людей.
- 8) Заключение по теме практической работы № 25.

*Каждый пункт плана раскрывается не менее чем 7-10 предложениями, на основании которых делается вывод по каждому разделу отчета.*

*По желанию студентов формируется отчетная электронная презентация по материалам практической работы №25.*

В завершение ПР №25 (для раскрытия пункта 8 плана) необходимо просмотреть демонстрационный материал по теме практической работы (ссылки

<https://www.youtube.com/watch?v=HVLqyKcfq1s>

<https://www.youtube.com/watch?v=4nk5Cb2uC8s>)

## **Практическое занятие №26**

### **Тема: «Правильные многогранники, их свойства»**

**Цель:** закрепить, систематизировать и корректировать знания по теме «Правильные многогранники и их свойства», определить уровень усвоения знаний, совершенствовать навыки самостоятельной работы по поиску и обработке учебной информации.

## Теоретические сведения и примеры задач:

### **Многогранник.**

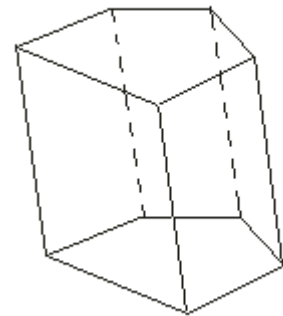
*Многогранник* – геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, их стороны – *рёбрами*, а вершины – *вершинами* многогранника. Отрезки, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые расположены по одну сторону от каждой своей грани.

### **Призма.**

*Призмой* называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.

Многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы; перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на другое, называется *высотой* призмы. Параллелограммы называются *боковыми гранями* призмы, а их стороны, соединяющие соответственные вершины оснований, – *боковыми рёбрами*. У призмы все боковые рёбра равны, как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями.



Плоскость, проведённая через какие-нибудь два боковых ребра, не принадлежащих одной грани призмы, называется *диагональной плоскостью*.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям, называется *прямой*, в противном случае — *наклонной*. Прямая призма, у которой в основаниях лежат правильные  $n$ -угольники, называется *правильной*.

### **Параллелепипед.**

*Параллелепипедом* называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его основания – прямоугольники.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине,

называются его *измерениями*.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется *кубом*.

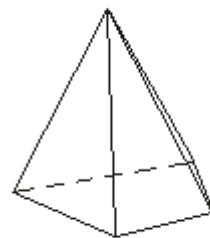
**Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.**

1. **Теорема:** В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.
2. **Теорема:** В параллелепипеде все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
3. **Теорема:** В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений.

**Пирамида.**

*Пирамидой* называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми, - треугольники, имеющие общую вершину.

Общая вершина боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, - её *высотой*.



Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и какую-нибудь диагональ основания, называется *диагональной плоскостью*.

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные и т.д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырёхугольник и т.д. Треугольная пирамида называется *тетраэдром*; у такой пирамиды все четыре грани - треугольники.

Пирамида называется *правильной*, если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой. Поэтому все боковые грани правильной пирамиды - равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*.

Часть пирамиды, заключённая между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённой пирамидой*. Параллельные многоугольники называются *основаниями*, а расстояние между ними - *высотой*. Усечённая пирамида называется *правильной*, если она составляет часть правильной пирамиды.

**Боковая поверхность призмы и пирамиды.**

1. **Теорема:** Боковая поверхность призмы равна произведению перпендикулярного сечения на боковое ребро.

**Следствие:** Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

- 2. Теорема:** Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.
- 3. Теорема:** Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.

## **2. Примеры**

**1. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7 см**

**Решение.**

Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:

По условию задачи  $a = 7$  см

Так как площадь грани призмы в данном случае будет равна  $7h$ , где  $h$  - высота бокового ребра, количество граней - три, то

$$49\sqrt{3} / 4 = 3 * 7h$$

$$49\sqrt{3} / 4 = 21h$$

откуда

$$h = 7\sqrt{3} / 12$$

**Ответ:** длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна  $7\sqrt{3} / 12$

**2. Найдите площадь правильной треугольной призмы, сторона основания которой 6 см, а высота - 10 см.**

**Решение.**

Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:

По условию задачи  $a = 6$  см откуда  $S = \sqrt{3} / 4 * 36 = 9\sqrt{3}$

Поскольку у правильной треугольной призмы оснований два, то площадь оснований будет равна

$$9\sqrt{3} * 2 = 18\sqrt{3}$$

Площадь каждой из граней будет равна  $6 * 10 = 60$ , а поскольку граней три, то  $60 * 3 = 180$

Таким образом, площадь полной поверхности призмы будет равна  $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$  см кв.

**Ответ:**  $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$

**3. В правильной четырёхугольной призме площадь основания  $144$  см<sup>2</sup>, а высота  $14$  см. Найдите диагональ призмы и площадь полной поверхности.**

**Решение.**

Правильный четырехугольник - это квадрат.

Соответственно, сторона основания будет равна  $\sqrt{144} = 12$  см.

Откуда диагональ основания правильной прямоугольной призмы будет равна

$$\sqrt{(12^2 + 12^2)} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

Диагональ правильной призмы образует с диагональю основания и высотой призмы прямоугольный треугольник. Соответственно, по теореме Пифагора диагональ заданной правильной четырехугольной призмы будет равна:

$$\sqrt{(12\sqrt{2})^2 + 14^2} = 22 \text{ см}$$

**Ответ:** 22 см

4. *Боковая грань правильной треугольной пирамиды представляет собой правильный треугольник, площадь которого  $16\sqrt{3}\text{см}^2$ . Вычислить периметр основания пирамиды.*

**Решение.**

Правильный треугольник - это равносторонний треугольник.

Соответственно, боковая грань пирамиды представляет собой равносторонний треугольник.

Площадь равностороннего треугольника равна:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3} r^2$$

Соответственно:

$$16\sqrt{3} = a^2 \sqrt{3} / 4$$

$$16 = a^2 / 4$$

$$a^2 = 64$$

$$a = 8 \text{ см}$$

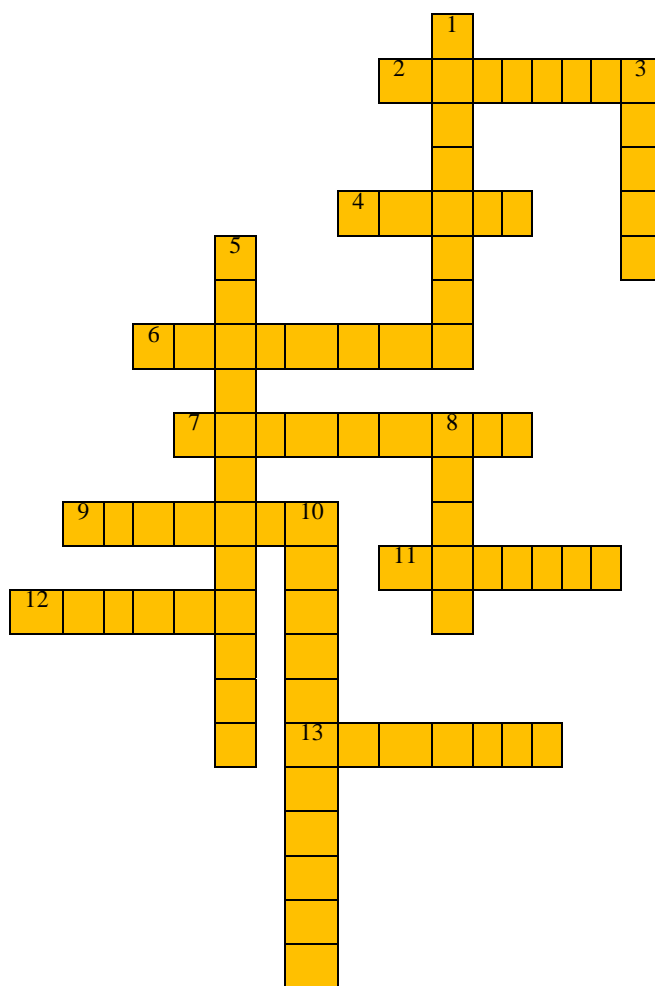
Основанием правильной треугольной пирамиды является правильный (равносторонний) треугольник. Таким образом, периметр основания пирамиды равен

$$8 * 3 = 24 \text{ см}$$

**Ответ:** 24 см.

**Содержание практической работы:**

**Задание №1.** Выполните кроссворд «Правильные многогранники»



**По горизонтали:**

**2.** Правильный шестигранник. **4.** Плоские многоугольники, из которых состоит поверхность многогранника. **6.** Правильный двадцатигранник. **7.**

Правильный двенадцатигранник. **9.** Из какого многоугольника состоит куб. **11.** Выпуклая точка, соединяющая многоугольники многогранника. **12.** Древнегреческий философ, подробно описавший правильные многогранники. **13.** Правильный восьмигранник.

**По вертикали:**

**1.** Треугольная пирамида. **3.** Сторона грани многогранника. **5.** Тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. **8.** Автор

теоремы (формулы)  $V+G=P+2$ , показывающей зависимость между вершинами, гранями и рёбрами выпуклого многогранника. **10.** Из какого многоугольника состоит тетраэдр, октаэдр.

**Задание №2.** Решите задачи:

**Вариант 1**

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности.
2. В правильной четырёхугольной призме площадь основания  $144 \text{ см}^2$ , а высота 14 см. Найдите диагональ призмы и площадь полной поверхности.

**Вариант 2**

1. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 12 см. Найдите площадь полной поверхности.
2. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7 см

**Практическое занятие №27**  
**Тема: «Конус и его элементы»**

**Цель:** закрепить, систематизировать и корректировать знания по теме «Конус и его элементы», учиться использованию формул вычисления боковой и полной поверхностей конус и усеченного конуса, совершенствовать навыки самостоятельной работы в решении практических задач.

**Теоретические сведения:**

**Конусом** называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей  $L$

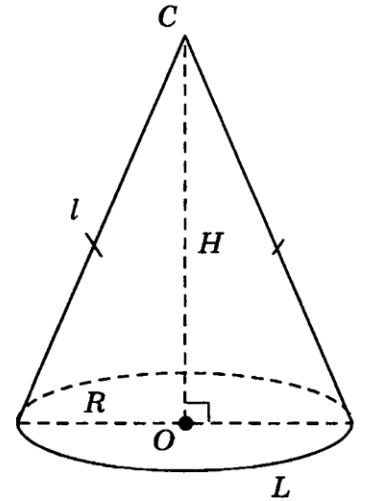
Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса**.

Точка  $C$  — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса**.

Прямая  $OC$  называется **осью конуса**, а отрезок  $OC$  называется **высотой конуса**.

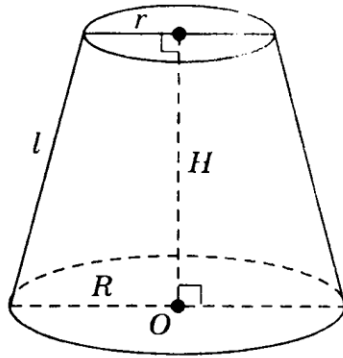
Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.



$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$



Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом**

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r); \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2; \quad S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2; \quad V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$



### Пример 1

. Высота конуса составляет  $\frac{2}{3}$  от диаметра его основания. Найти отношение площади основания конуса к площади его боковой поверхности.

**Решение.** Площадь основания конуса  $S_{осн} = \pi R^2$ . Площадь боковой поверхности конуса  $S_{бок.пов} = \pi R L$ , где  $L$  — длина образующей

По теореме Пифагора  $L^2 = H^2 + R^2$ ;  $H = \frac{2}{3} \cdot 2R = \frac{4}{3}R$ . Отсюда  $L = \sqrt{\frac{16}{9}R^2 + R^2} = \frac{5}{3}R$ . Следовательно,

но, конус имеет  $S_{бок.пов} = \pi R \cdot \frac{5}{3}R = \frac{5}{3}\pi R^2$ . Искомое отношение

$$\frac{\pi R^2}{\frac{5}{3}\pi R^2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ. 0,6.

### Содержание практической работы:

#### №1

Высота конуса равна 8, а диаметр основания – 30. Найдите образующую конуса.

#### №2

Диаметр основания конуса равен 56, а длина образующей – 53. Найдите высоту конуса.

#### №3

Найдите площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, если образующая его равна 7, а площадь основания равна  $36/\pi$ .

#### №4

Площадь боковой поверхности конуса равна 13, длина образующей –

$\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$ . Найдите площадь основания конуса.

### Практическое занятие №28

#### Тема: «Конические сечения. Развертка конуса»

**Цель:** закрепить, систематизировать и корректировать знания по теме «Конус и его элементы. Конические сечения», учиться использованию формул вычисления боковой и полной поверхностей конуса и усеченного конуса, научиться выполнять пространственную модель конуса, используя развертку, совершенствовать навыки самостоятельной работы в решении практических задач.

### Теоретические сведения:

**Конусом** называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей  $L$

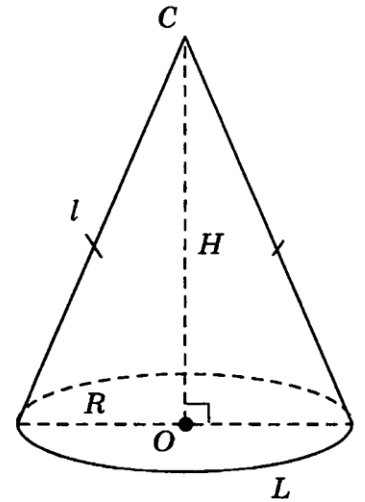
Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса**.

Точка  $C$  — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса**.

Прямая  $OC$  называется **осью конуса**, а отрезок  $OC$  называется **высотой конуса**.

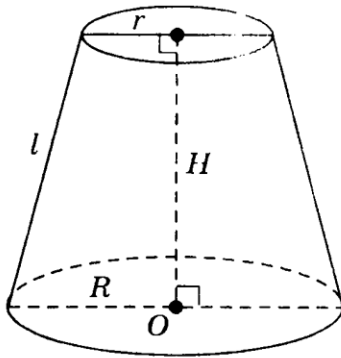
Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.



$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$



Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом**

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r); \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2; \quad S_1 = \pi R^2;$$

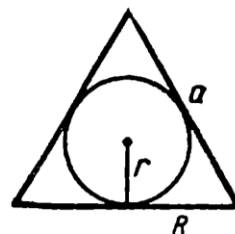
$$S_2 = \pi r^2; \quad V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

### Пример 1

В конус, осевое сечение которого есть равно-  
сторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если  
объем шара равен  $\frac{32}{3}$ .

Решение. Изобразим осевое сечение ко-  
нуса

Сечение шара на этом рисунке  
является вписанным кругом,  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , где  $a$  —  
сторона треугольника. Радиус основания кону-  
са  $R = \frac{a}{2}$ . Высота конуса  $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Объем  
конуса



$$V_k = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4}.$$

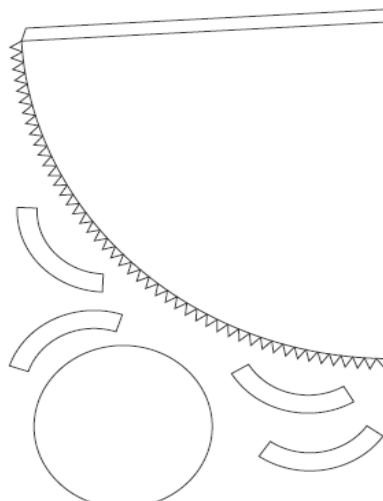
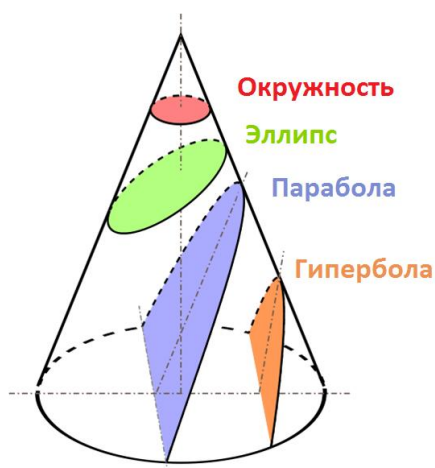
Объем шара  $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi r^3$ . Так как  $a = 2\sqrt{3}r$ , то

$$V_k = \frac{\pi \cdot \sqrt{3} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3}{24} = 3\pi r^3.$$

Отсюда

$$\frac{V_k}{V_{ш}} = \frac{3\pi r^3}{\frac{4}{3} \pi r^3} = 2,25, \quad V_k = 2,25 \cdot V_{ш} = 2,25 \cdot \frac{32}{3} = 24.$$

Ответ. 24.



### Содержание практической работы:

#### №1

Угол при основании осевого сечения конуса  $60^\circ$ , высо-  
та конуса 3. Найти боковую поверхность конуса с точ-  
ностью до 0,1.

#### №2

Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник.  
Площадь боковой поверхности этого конуса равна 5.  
Найти площадь полной поверхности конуса.

### №3

Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найти диаметр основания, если площадь полной поверхности конуса равна  $363\pi$ .

## Практическое занятие №29

### Тема: «Комбинации многогранников и тел вращения.»

**Цель:** повторить формулы и понятия планиметрии: площадь круга, длина окружности, формулы площадей треугольника, прямоугольника, трапеции, ромба; повторить и закрепить основные элементы шара при решении геометрических задач с использованием комбинаций многогранников и тел вращения, выработать умения делать к задачам наглядные чертежи.

### Теоретические сведения:

Шар – фигура, полученная при вращении полукруга вокруг своего диаметра.

Сфера – это поверхность шара. Сфера состоит из множества точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой центром сферы.



Радиус шара (сферы) – это отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой на поверхности шара.

Хорда – это отрезок, который соединяет любые две точки сферы

Диаметр – это хорда, которая проходит через центр шара

1) Объём шара:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

2) Площадь поверхности:  $S = 4\pi R^2$

### Комбинации многогранников и тел вращения.

**Опр.** Многогранник, все вершины которого принадлежат сфере, называется вписанным в шар, а шар называется описанным около многогранника.

#### Шар всегда можно описать:

- 1) около пирамиды, боковые рёбра которой равны. Тогда центр О шара лежит на высоте пирамиды;
- 2) около правильной усечённой пирамиды всегда. Тогда центр О шара лежит на высоте усечённой пирамиды, проходящей через центры оснований;
- 3) около прямой призмы, если около её основания можно описать окружность. Тогда центр О шара лежит в середине отрезка, соединяющего центры описанных около оснований окружностей;
- 4) около цилиндра всегда. Тогда центром шара служит центр симметрии осевого сечения цилиндра;
- 5) около конуса всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса;
- 6) около усечённого конуса всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса.

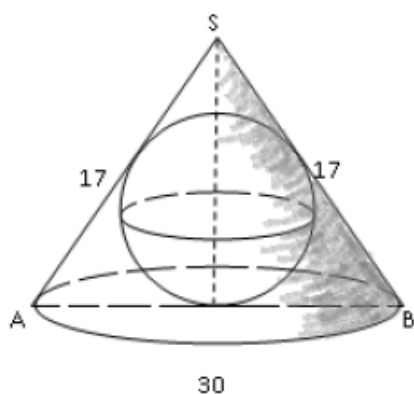
**Опр.** Многогранник, все грани которого касаются сферы, называется описанным около шара, а шар называется вписанным в многогранник.

#### Шар всегда можно вписать:

- 1) в конус. Тогда центром шара служит центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса;
- 2) в равносторонний цилиндр( осевое сечение- квадрат);
- 3) в прямую призму, когда в основание призмы можно вписать окружность, диаметр этой окружности равен высоте призмы  $r_{\text{шара}} = R_{\text{впис. в осн. окр.}} = \frac{1}{2} H_{\text{высоты призмы}}$ ;
- 4) в пирамиду, боковые грани которой равнонаклонены к плоскости основания. Центр шара лежит на высоте пирамиды- это точка пересечения высоты с биссектрисой угла между апофемой и проекцией этой апофемы на плоскость основания.

#### Содержание практической работы:

**Задача 1.** Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник со сторонами 17, 17 и 30. Найти V и Sпов. вписанного шара.



Дано:  $SAB$  – осевое сечение конуса;  $AS=SB=17$ ;  $AB=30$   
 Найти:  $V$  и  $S_{\text{пов шара}}$

Решение.

Из теории знаем, что шар всегда можно вписать в конус. Тогда центром шара служит центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса

Значит радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса, в  $\triangle SAB$

$$R_{\text{шара}} = r_{\triangle SAB} = \frac{S_{\triangle}}{p}$$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{17 + 17 + 30}{2} = 32$$

$$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{32 \cdot (32-17) \cdot (32-17) \cdot (32-30)} = \\ = \sqrt{32 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 2} = \sqrt{64 \cdot 15^2} = 8 \cdot 15 = 120$$

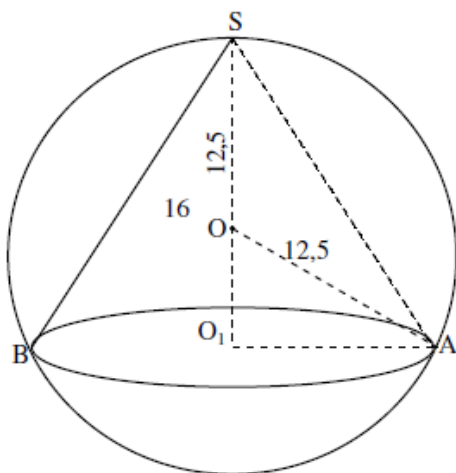
$$R_{\text{шара}} = \frac{S_{\triangle}}{p} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{3375}{64} = \frac{1125}{16} \pi$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{225}{16} = \frac{225}{4} \pi$$

Ответ:  $V = \frac{1125}{16} \pi$ ;  $S = \frac{225}{4} \pi$

**Задача 2.** В сферу радиуса 12,5 см вписан конус, высота которого равна 16 см. Найти  $S$  осевого сечения конуса, его объем и  $S$  поверхности.



Дано:  $SAB$  – конус;  $R=SO=12,5$   
 $SO_1=16$

Найти:  $S_{\triangle ASB}$ ;  $V_{\text{конуса}}$ ;  $S_{\text{полн.конуса}}$

Решение

1) Найдем объем конуса:  $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

$R=O_1A$ ;  $H=SO_1=16$

$OO_1=SO-O_1O=16-12,5=3,5$

Найдем радиус конуса из прямоугольного треугольника  $OO_1A$  по теореме Пифагора:

$$AO^2 = O_1O^2 + O_1A^2 \\ O_1A^2 = AO^2 - O_1O^2 = 12,5^2 - 3,5^2 = \\ = (12,5 - 3,5)(12,5 + 3,5) = 9 \cdot 16 = 144$$



$$O_1A = \sqrt{144} = 12$$

$$R = 12 \Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 16 = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 16 = 768\pi$$

- 2) Площадь осевого сечения конуса – это площадь  $\triangle SAB$ . Она равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot ah = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SO_1 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192$$

- 3) Найдем поверхность конуса по формуле:  $S_{\text{полн.конуса}} = \pi RL + \pi R^2$

Образующую  $L=SA$  найдем из  $\triangle SO_1A$  по теореме Пифагора:

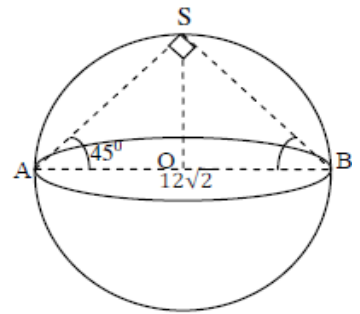
$$AS^2 = O_1S^2 + O_1A^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$$

$$AS = \sqrt{400} = 20$$

$$S_{\text{полн.конуса}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi \cdot 12 \cdot 20 + \pi \cdot 12^2 = 240\pi + 144\pi = 384\pi$$

Ответ:  $V = 768\pi$ ;  $S_{\triangle ASB} = 192$ ;  $S_{\text{полн.конуса}} = 384\pi$

**Задача 3.** В сферу вписан конус, осевое сечение которого представляет собой прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной  $12\sqrt{2}$ . Вычислить объем сферы и объем конуса.



Дано:  $\triangle SAB$  – прямоугольный;  $AB = 12\sqrt{2}$

Найти:  $S$  сферы

Решение:

Шар можно описать около конуса всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса.

Так как осевым сечением конуса по условию задачи служит прямоугольный треугольник, то центр описанной около него окружности находится на середине гипотенузы. Т.е. гипотенуза является диаметром описанной окружности.

$$R = \frac{1}{2}AB = 6\sqrt{2}$$

$$V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (6\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \cdot \sqrt{2}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 2\sqrt{2} = 576\sqrt{2}\pi$$

Кроме этого осевым сечением конуса служит равнобедренный треугольник. Делаем вывод:  $\triangle ASB$  – прямоугольный и равнобедренный, значит углы при основании равны  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ .

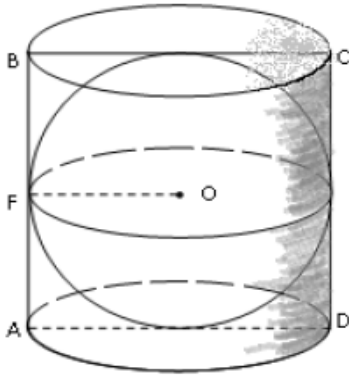
$$\sin 45^\circ = \frac{SB}{AB} \Rightarrow SB = AB \cdot \sin 45^\circ = 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$$

$$\sin 45^\circ = \frac{SO}{AS} \Rightarrow SO = AS \cdot \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot (6\sqrt{2})^2 \cdot 6\sqrt{2} = \frac{1}{3}\pi \cdot 72 \cdot 6\sqrt{2} = 144\sqrt{2}\pi$$

Ответ:  $V_{\text{сферы}} = 576\sqrt{2}\pi$ ;  $V_{\text{конуса}} = 144\sqrt{2}\pi$

**Задача 4.** В цилиндр, объем которого равен  $250\pi$ , вписан шар. Найти его объем.



Решение:

Шар всегда можно вписать в равносторонний цилиндр (осевое сечение которого квадрат)

$ABCD$  – квадрат  $\Rightarrow AB=BC$  (высота цилиндра равна диаметру круга, лежащего в основании)  $\Rightarrow H=2R$

$ABCD$  – квадрат  $\Rightarrow$  радиус шара равен радиусу основания цилиндра

Известен объём цилиндра, поэтому выразим из формулы объема радиус  $R$  и найдем его численное значение:

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

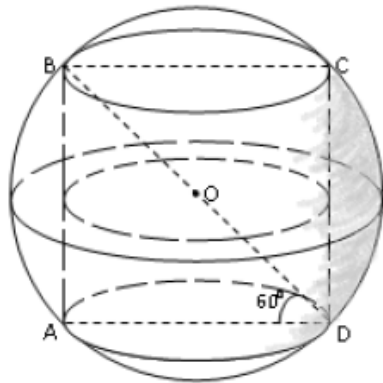
$$R^3 = \frac{V_{\text{цилиндра}}}{2\pi} = \frac{250\pi}{2\pi} = 125$$

$$R = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 125 = \frac{500}{3}\pi$$

Ответ:  $\frac{500}{3}\pi$

**Задача 5.** В шар радиуса 12 см вписан цилиндр, в котором диагональ осевого сечения составляет с его основанием угол  $60^\circ$ . Вычислить объём цилиндра.



Дано:  $R_{\text{шара}}=12$ ;  $ABCD$  – осевое сечение цилиндра;  
 $\angle BDA=60^\circ$

Найти:  $V_{\text{цилиндра}}$

Решение:

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H$$

Рассмотрим прямоугольный  $\triangle BAD$ . Центр шара, точка  $O$  является серединой гипотенузы этого треугольника  $\Rightarrow BD=2R=24$

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AB = BD \cdot \sin 60^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$H = 12\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AD}{BD} \Rightarrow AD = BD \cdot \cos 60^\circ = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

$$R = \frac{1}{2}AD = 6$$

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H = \pi \cdot 6^2 \cdot 12\sqrt{3} = \pi \cdot 36 \cdot 12\sqrt{3} = 432\sqrt{3}\pi$$

Ответ:  $432\sqrt{3}\pi$

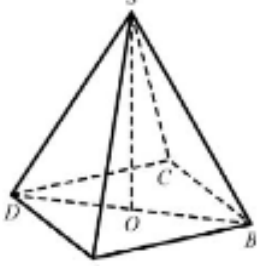
Содержание практической работы:

**Задача 1.** В треугольную пирамиду со сторонами основания 20 см, 12 см и 16 см вписан шар. Найти его радиус, если двугранные углы при основании пирамиды равны по  $60^\circ$ .

**Задача 2.** В треугольную пирамиду со сторонами основания 10 см, 17 см и 21 см вписан шар. Найти его радиус, если высота пирамиды равна 12 см, а двугранные углы при основании равны между собой.

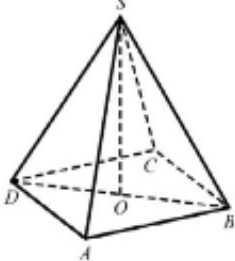


**Контрольная работа №6 по теме: «Многогранники и тела вращения»**  
**Вариант 1**

<b><u>№ задания</u></b>	<b><u>Содержание задания</u></b>
<b>1</b>	<b>Цилиндрическая поверхность называется...</b>
<b>2</b>	<b>Площадь полной поверхности прямой призмы равна...</b>
<b>3</b>	<b>Изобразите правильную треугольную призму и правильную четырехугольную пирамиду.</b>
<b>4</b>	<b>Изобразите осевое сечение конуса.</b>
<b>5</b>	<b>Высота конуса 4 см, а образующая 9 см. Найдите радиус основания.</b>
<b>6</b>	<b>Радиус цилиндра 3 см, высота 5 см. Найти площадь полной поверхности и объем цилиндра.</b>
<b>7</b>	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>В правильной четырехугольной пирамиде <math>SABCD</math> точка <math>O</math> – центр основания, <math>S</math> – вершина, <math>SD=30</math>, <math>BD=36</math>. Найдите длину отрезка <math>SO</math>.</p> </div> </div>
<b>8</b>	<b>Найдите площадь поверхности полушара с радиусом 5 см.</b>
<b>9</b>	<b>В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной, равной 1. Диагональ параллелепипеда <math>\sqrt{6}</math>. Найти объем.</b>
<b>10(*)</b>	<b>Радиусы оснований усеченного конуса 3 и 1. Найти боковую поверхность этого конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом <math>60^\circ</math>. <math>\pi = 3,1415</math> Ответ записать с 3 цифрами после запятой.</b>

**Вариант 2**

<b><u>№ задания</u></b>	<b><u>Содержание задания</u></b>
<b>1</b>	<b>Отрезок, соединяющий центры оснований усеченного конуса, называется...</b>
<b>2</b>	<b>Площадь полной поверхности сферы равна...</b>
<b>3</b>	<b>Изобразите правильную четырехугольную призму и правильную шестиугольную пирамиду.</b>

4	Изобразите диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда.
5	Высота конуса 7 см, а образующая 10 см. Найдите радиус основания.
6	Радиус цилиндра 4 см, высота 6 см. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.
7	 <p>В правильной четырехугольной пирамиде <math>SABCD</math> <math>O</math> – центр основания, <math>S</math> – вершина, <math>SD=17</math>, <math>BD=16</math>. Найдите длину отрезка <math>SO</math>.</p>
8	Найдите площадь поверхности полушара с радиусом 9 см.
9	Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна 60, сторона основания 6. Найдите объем этой пирамиды.
10(*)	Радиусы оснований усеченного конуса 3 и 1. Найдите боковую поверхность этого конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом $60^\circ$ $\pi = 3,14159$ Ответ записать с 4 цифрами после запятой.

### 3.8. Задания для оценки освоения раздела 8 «Первообразная функции, её применение»

#### Практическое занятие №30

#### Тема: «Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона – Лейбница.»

**Цель:** закрепить определение криволинейной трапеции, формулу Ньютона-Лейбница для расчёта определённого интеграла, навык вычисления площади криволинейной трапеции, формировать умение по готовому чертежу составлять формулу площади и находить её значение.

#### Теоретические сведения:

Определение. Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

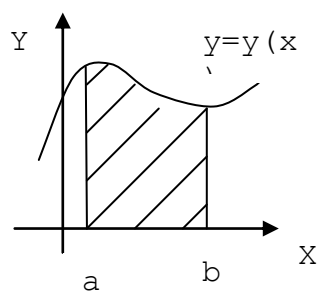


Рис .

- сверху - графиком непрерывной функции  $y=y(x)$
- снизу – осью  $OX$  ( $y=0$ )
- слева – прямой  $x=a$
- справа – прямой  $x=b$

Утверждение. Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x) dx$$

(1)

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

### Содержание практической работы:

**Пример 1.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^2 - 2x + 2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  и осью  $OX$ .

**Решение:** данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

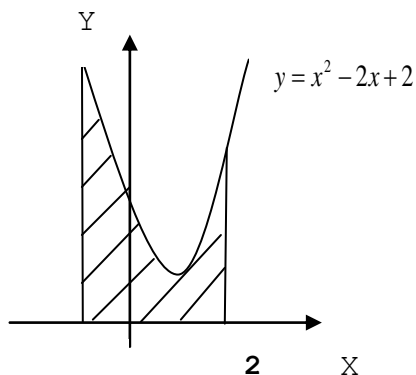


Рис .

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right|_{-1}^2 = \\ &= \left( \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) - (2^2 - (-1)^2) + (2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) = \\ &= 3 - 3 + 6 = 6. \end{aligned}$$

**Ответ: 6 кв.ед.**

Пусть  $y=f(x)$  – непрерывная функция при  $x \in [a, b]$ , график которой расположен ниже оси  $OX$  (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

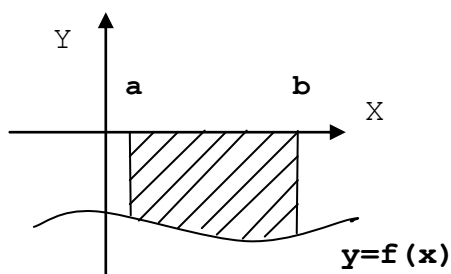


Рис.

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

**Пример 2.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^2 - 5x + 6$  и осью  $OX$ .

**Решение:** данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси  $OX$ , поэтому применим формулу (2).

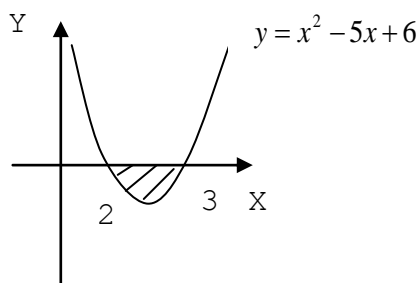


Рис.

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 - \frac{5x^2}{2} \Big|_2^3 + 6x \Big|_2^3 \right| = \\ &= \left| \left( \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) - \left( \frac{5 \cdot 3^2}{2} - \frac{5 \cdot 2^2}{2} \right) + (6 \cdot 3 - 6 \cdot 2) \right| = \\ &= \left| \frac{19}{3} - \frac{25}{2} + 6 \right| = \left| \frac{38 - 75 + 36}{6} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

**Ответ:** 1/6 кв.ед.

**Пример 3.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 + 1$  и  $y = -x + 3$ .

**Решение:** данная фигура (рис. 5) представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу:  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 1$ .

$$S = \int_{-2}^1 (-x + 3) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx. \text{ Можно записать под один интеграл:}$$

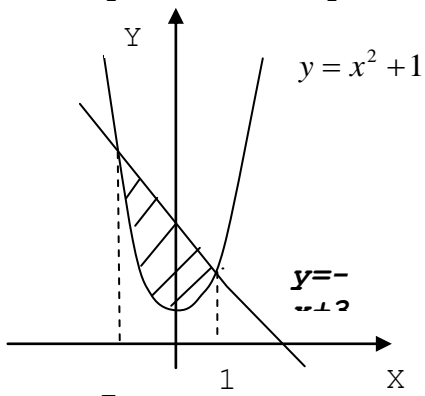


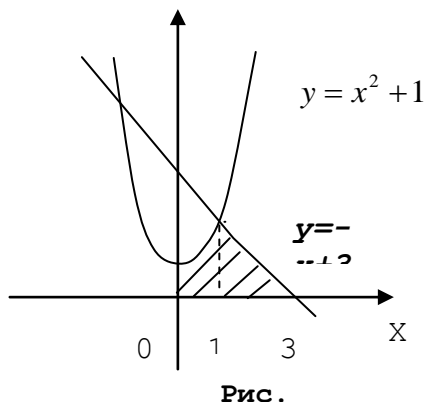
Рис.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (-x + 3 - (x^2 + 1)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \\ &= 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) - \left( \frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right) - \\ &\quad - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 6 - \left( -\frac{3}{2} \right) - 3 = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

**Пример 4.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 + 1$  и  $y = -x + 3$ , и координатными осями.

**Решение:** данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций  $S = S_1 + S_2$ , где  $S_1 = \int_0^1 (x^2 + 1) dx$  и  $S_2 = \int_1^3 (-x + 3) dx$ . Получим формулу:



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^3 (-x + 3) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^1 - \left. \frac{x^2}{2} + 3x \right|_1^3 = \\ &= \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + (1 - 0) - \left( \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + (3 \cdot 3 - 3 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{3} + 1 - 4 + 6 = 3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ответ:  $3\frac{1}{3}$  кв.ед.

### Содержание практической работы:

#### №1

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , осью  $Ox$  и графиком функции  $y = f(x)$

- 1)  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $f(x) = x^3$ ;
- 2)  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $f(x) = x^2$ ;
- 3)  $a = -2$ ,  $b = 1$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ ;
- 4)  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $f(x) = x^3 + 1$ ;
- 5)  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{2\pi}{3}$ ,  $f(x) = \sin x$ ;
- 6)  $a = -\frac{\pi}{6}$ ,  $b = 0$ ,  $f(x) = \cos x$ .

#### №2

Найти площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и параболой

- 1)  $y = 4 - x^2$ ;
- 2)  $y = 1 - x^2$ ;
- 3)  $y = -x^2 + 4x - 3$ .

### Практическое занятие №31

Тема: «Геометрический смысл определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.»

**Цель:** продолжить работу по закреплению умения вычислять площадь криволинейной трапеции как геометрического смысла определенного интеграла, закрепить формулу Ньютона-Лейбница для расчёта определённого интеграла, формировать умение составлять и вычислять определённые интегралы по готовому чертежу.

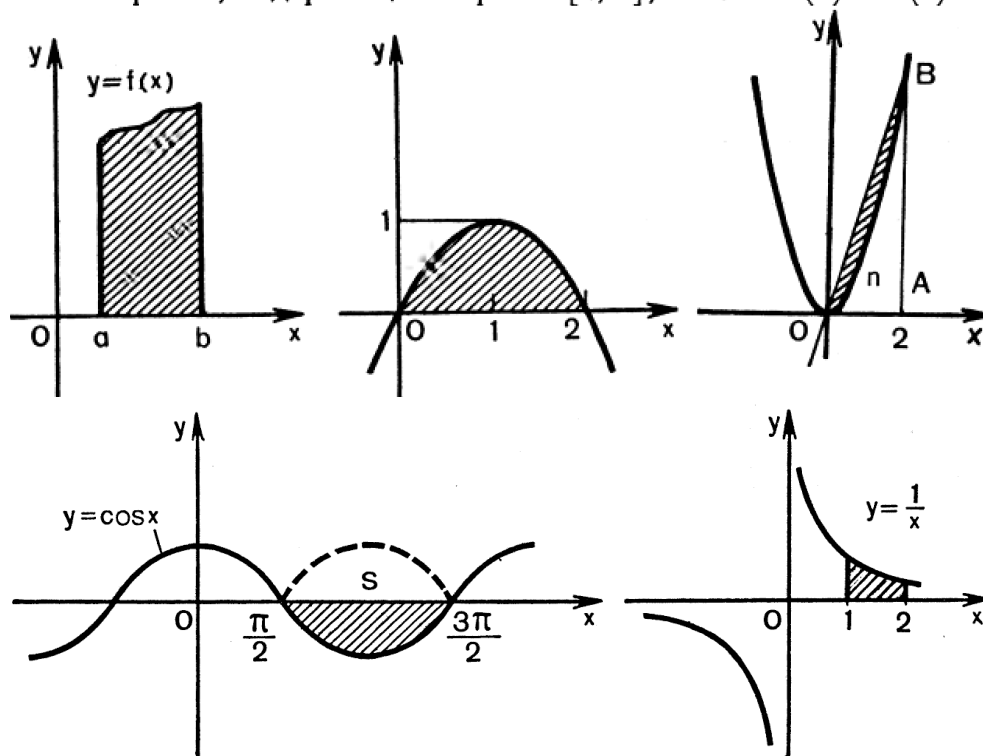
### Теоретические сведения:

**Геометрический смысл определённого интеграла** в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x) dx$$

1. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ .

2. **Т е о р е м а.** Пусть  $f$  — непрерывная и неотрицательная на отрезке  $[a; b]$  функция, а  $S$  — площадь соответствующей криволинейной трапеции. Если  $F$  есть первообразная для  $f$  на интервале, содержащем отрезок  $[a; b]$ , то  $S = F(b) - F(a)$



### Содержание практической работы:

#### Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1)  $y=2x-x^2$  и  $y=0$

2)  $y=x^2$  и  $y=2x$

3)  $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=\frac{\pi}{4}$ ; 4)  $y=\cos x$ ,  $y=0$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ;

5)  $y=\frac{1}{x}$ ,  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $y=0$ .

**Решение.** 1) Для функции  $y=2x-x^2$  первообразная есть  $F(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3$ . Найдем точки пересечения кривой  $2x-x^2$  с осью абсцисс:  $2x-x^2=0$ ,  $x=0$ ,  $x=2$ , т. е.  $(0; 0)$  и  $(2; 0)$ . Значит,  $a=0$ ,  $b=2$ .

Искомую площадь находим по формуле (1):

$$S=F(b)-F(a)=F(2)-F(0)=4-\frac{8}{3}-0+0=\frac{4}{3}.$$

2) Для функции  $y=x^2$  первообразная  $F(x)=\frac{x^3}{3}$ , а для функции  $y=2x$  первообразная  $P(x)=x^2$ .

Найдем координаты точек пересечения заданных линий:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x; \end{cases} \begin{cases} x^2=2x, \\ y=2x; \end{cases} \begin{cases} x(x-2)=0, \\ y=2x; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$$

Искомая площадь равна разности площадей треугольника  $OAB$  и криволинейной трапеции  $OnBA$ , т. е.  $S=S_{OAB}-S_{OnBA}$ . Так как

$$S_{OAB}=P(2)-P(0)=4-0=4, \quad S_{OnBA}=F(2)-F(0)=\frac{2^3}{3}-0=\frac{8}{3}, \text{ то } S=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

3) На промежутке  $[0; \frac{\pi}{4}]$  значения  $f(x)$  положительны. Одна из первообразных для функции  $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$  есть  $F(x)=\operatorname{tg} x$ , следовательно,

$$S=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 0=1.$$

4) Криволинейная трапеция изображена на рисунке

Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y=-\cos x$ ,  $y=0$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

Одна из первообразных функции  $y=-\cos x$  есть  $F(x)=-\sin x$ .

$$S=F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\sin \frac{3\pi}{2}-\sin \frac{\pi}{2}\right)=2.$$

5) Криволинейная трапеция изображена на рисунке

Одна из первообразных для функции  $y=\frac{1}{x}$  есть  $F(x)=\ln x$ .

$$S=F(2)-F(1), \quad S=\ln 2-\ln 1=\ln 2 \approx 0,7.$$

### Задания для самостоятельной работы:

Постройте криволинейную трапецию, ограниченную линиями, и вычислите ее площадь:

1)  $y=x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=2$ ; 2)  $y=x^3$ ,  $y=0$ ,  $x=2$ ; 3)  $y=x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=3$ ; 4)  $y=x^3$ ,  $y=0$ ,  $x=3$ ; 5)  $y=x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=-2$ ; 6)  $y=-x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=2$ .

### Практическое занятие №32

Тема: «Решение задач на применение интеграла для вычисления

## физических величин и площадей»

**Цель:** отработать умение вычислять определенные интегралы и применять полученные компетенции при решении задач прикладного характера.

### Теоретические сведения:

№ п/п	Физическая величина	Формула	Единицы измерения
1	Путь, пройденный точкой с переменной скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	$t_1, t_2 - c$ ; $v(t) - м/с$ ; $S - м$ .
2	Работа переменной силы $f(x)$ на пути от точки $a$ до точки $b$	$A = \int_a^b f(x) dx$	$f(x) - Н$ ; $a; b - м$ ; $A - Дж$ .
3	Сила давления жидкости на вертикальную пластину	$P = g \int_a^b p x f(x) dx$	$g = 9,8 м/с^2$ ; $p - кг/м^3$ ; $a; b - м$ ; $p - Н$ .

### 1. Задача о вычислении пути

**Пример 1.** Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  $v = 2t + 3t^2$  (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \quad (1)$$

Решение:

1.  $t_1 = 0$ с;  $t_2 = 5$ с.

2. По формуле (1) найдем путь, пройденный телом за 5 сек.

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2) dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150(м).$$

Ответ.  $S = 150$  м.

**Пример 2.** Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v_1 = (6t^2 + 2t)$  м/с, второе – со скоростью  $v_2 = (4t + 5)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 = 275(м)$$



$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = 75(\text{м})$$

Таким образом,  $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200(\text{м})$ .

## **2. Задача о вычислении работы переменной силы.**

Работа  $A$  этой силы  $F$  вычисляется по формуле:

$$A = F \cdot s, \quad (2)$$

Где  $S$  – перемещение, м.

Если  $F$  – сила упругости, то по закону Гука

$$F = kx, \quad (2^*)$$

где  $x$  – величина растяжения или сжатия,

$k$  – коэффициент пропорциональности.

Работа переменной силы вычисляется по формуле (4)

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

**Пример 3.** Сила упругости  $F$  пружины, растянутой на  $l_1 = 0,05\text{м}$ , равна  $3\text{Н}$ . Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на  $l_2 = 0,1\text{м}$ ?

Решение:

1. Определим коэффициент пропорциональности  $k$ .

Подставим в формулу (2\*)  $F = 3\text{ Н}$ ,  $x = 0,05\text{ м}$ :

$3 = k \cdot 0,05$ , т.е.  $k = 60$ , следовательно,  $F = 60x = f(x)$ .

2. Подставив  $F = 60x$  в формулу (3), найдем значение работы переменной силы, полагая, что  $a = 0$ ;  $b = 0,1$ :

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3\text{Дж}$$

Ответ.  $A = 0,3\text{Дж}$ .

## **3. Задача о силе давления жидкости.**

Согласно закону Паскаля величина  $P$  давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = \rho g h S, \quad (4)$$

Где  $g$  – ускорение свободного падения в  $\text{м/с}^2$ ;

$\rho$  – плотность жидкости в  $\text{кг/м}^3$ ;

$h$  – глубина погружения площадки в м;

$S$  – площадь площадки в  $\text{м}^2$ ;

Сила давления жидкости на вертикальную пластину вычисляется по формуле (5)

$$P = g \int_a^b \rho x f(x) dx. \quad (5)$$

## **Пример 4.**

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды  $1000\text{ кг/м}^3$ ), наполняющей аквариум, на одну из

его вертикальных стенок, размеры которой 0,4мх0,7м.

Решение:

1. Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому  $f(x)=0.7x$ , где  $x \in [0;0,4]$ , поэтому пределы интегрирования  $a=0$  и  $b=0,4$ .
2. Для нахождения силы давления воды на стену воспользуемся формулой (5).

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 * 0,7 * x dx = 700 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,4} = 56g \approx 549 \text{ Н}$$

$g=9,8 \text{ м/с}^2$  ускорение свободного падения.

### Содержание практической работы

#### Вариант 1 (2).

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  $v=9t^2-2t-8$  (м/с). Найти путь, пройденный телом за 3 (4) секунды от начала движения.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v_1=(2t^2+4t)$  м/с, второе – со скоростью  $v_2=(3t+2)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 (12) с?

3. Сила упругости  $F$  пружины, растянутой на  $l_1=0,02$  (0,05)м, равна 2Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на  $l_2=0,05$  (0,1)м?

### Контрольная работа №7 по теме: «Первообразная функции, её применение»

#### Вариант 1

**№1.** Для функции  $f(x) = 2x^2 + x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A(1;1)$

**№2.** Вычислите интеграл:

а)  $\int_0^1 (2x^2 + 3) dx$

б)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx$

**№3.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2x + 2$ ,  $x=-1$ ,  $x=2$  и осью  $OX$ .

**№4.** Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  $v=9t^2-2t-8$  (м/с). Найти путь, пройденный телом за 3 секунды от начала движения.

#### Вариант 2

**№1.** Для функции  $f(x) = 3x^2 - 5$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A(1;3)$

**№2.** Вычислите интеграл:

а)  $\int_0^1 (3x^2 - x) dx$

$$б) \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx$$

**№3.** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:  
параболой  $y = x^2 - 4x + 4$ , прямыми  $x=0$  и  $x=3$  и осью  $Ox$ .

**№4.** Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  $v=9t^2-2t-8$  (м/с).  
Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения.

### **3.9. Задания для оценки освоения раздела 9 «Степени и корни. Степенная функция»**

#### **Практическое занятие №33**

#### **Тема: «Решение иррациональных уравнений»**

**Цель:** обобщить и систематизировать знания по теме «Иррациональные уравнения», отработать умение применять полученные компетенции при решении иррациональных уравнений с использованием различных приемов.

#### **Теоретические сведения:**

##### ***1. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ***

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

- 1) «уединение» корня в одной из частей уравнения и возведение в соответствующую степень;
- 2) введение новой переменной;
- 3) сведение к системе уравнений;
- 4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \quad (*)$$

при решении, которого важную роль играет четность или нечетность  $n$ .

Если  $n$  - нечетное, то уравнение (\*) равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если  $n$  - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений):  $f(x) \geq 0$ . Уравнение (\*) в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n; \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$$

**Решение.** Так как в данном примере  $n=3$  - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

$$x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}$ .

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} = 2-x.$$

**Решение.** Так как  $n=2$  - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1 = (2-x)^2 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4-4x+x^2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}.$$

**Ответ:**  $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ .

Иногда встречаются уравнения вида  $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ , которые решаются следующим образом:

$n$  - нечетное  $\Rightarrow f(x) = g(x)$

$$n \text{ - четное} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

**Пример 3.** Решить уравнение  $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 0$ .

**Решение.** Запишем данное уравнение в виде:  $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1}$ . Возводя обе части в квадрат и учитывая, что  $x+1 \geq 0$ , получим уравнение  $2x+6=x+1$ , решение которого есть  $x=-5$  – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

**Ответ:** нет решений

Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

**Пример 4.** Решить уравнение  $\sqrt{2x-9} - \sqrt{x-3} = 1$ .

**Решение.** Запишем уравнение в виде:  $\sqrt{2x-9} = 1 + \sqrt{x-3}$ .

Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x - 9 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x - 7\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ (x - 7)^2 = 4(x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 14x + 49 = 4x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 18x + 61 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x = 9 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow x = 9 + \sqrt{20}.$$

**Ответ:**  $x = 9 + \sqrt{20}$ .

Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

**Пример 5.** Решить уравнение  $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 10$ .

**Решение.** Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде  $x^2 + 3x - 5 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 5$

и введем «новую» переменную:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x - 5}, y \geq 0$$

$$\text{Получим } y^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -5. \end{cases}$$

Вернемся к «старым» переменным  $\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 1$  или  $\sqrt{x^2 + 3x - 5} = -5$ .

Второе из полученных уравнений решений не имеет,

Второе из полученных уравнений решений не имеет,

а решения первого есть числа  $= \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$ .

$$\textbf{Ответ: } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}.$$

### Содержание практической работы:

#### Вариант 1.

Решить иррациональные уравнения:

1.  $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5 - x}$
2.  $\sqrt{x + 11} = x - 1$
3.  $\sqrt{x^2 + x + 4} = 4$

#### Вариант 2.

1.  $\sqrt{x + 4} = \sqrt{2x - 1}$
2.  $\sqrt{x + 10} = x - 2$
3.  $\sqrt{x^2 - x - 3} = 3$

## **Контрольная работа №8 по теме: «Степени и корни. Степенная функция»**

### **Вариант 1**

**№1.** Вычислите:

а)  $\sqrt[5]{-100000}$ ; б)  $\sqrt[4]{1296}$ ; в)  $-\sqrt[6]{0,000064} + \sqrt[3]{-1331}$ .

**№2.** Расположите числа в порядке убывания:  $\sqrt[3]{31}$ ;  $\sqrt{10}$ ;  $\sqrt[6]{666}$ .

**№3.** Упростите выражение и найдите его значение:  $\sqrt{9b^2} - \sqrt[3]{8b^3} - \sqrt[4]{256b^4}$ , при  $b = -3$ .

**№4.** Вычислите: а)  $81^{\frac{1}{2}}$ ; б)  $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ ; в)  $0,00032^{\frac{1}{5}}$ ; г)  $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ ; д)  $16^{-\frac{1}{4}}$ .

**№5.** Упростите выражение: а)  $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$ ; б)  $x^{\frac{5}{6}} : x^{\frac{1}{3}}$ ; в)  $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ; г)  $(a^{0,4})^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0,8}$ .

**№6.** Решите уравнение: а)  $\sqrt[3]{x^2 - 9x - 19} = -3$ ; б)  $\sqrt[6]{x^2 + 7x + 13} = -1$ .

### **Вариант 2**

**№1.** Вычислите:

а)  $\sqrt[3]{-343}$ ; б)  $\sqrt[6]{0,000064}$ ; в)  $\sqrt[7]{-128} + \sqrt[4]{625}$ .

**№2.** Расположите числа в порядке возрастания:  $\sqrt{11}$ ;  $\sqrt[3]{30}$ ;  $\sqrt[6]{777}$ .

**№3.** Упростите выражение и найдите его значение:  $\sqrt{25a^2} + \sqrt[3]{64a^3} - \sqrt[4]{16a^4}$ , при  $a = -5$ .

**№4.** Вычислите: а)  $64^{\frac{1}{3}}$ ; б)  $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; в)  $0,0081^{\frac{1}{4}}$ ; г)  $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ ; д)  $32^{-\frac{1}{5}}$ .

**№5.** Упростите выражение: а)  $b^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ ; б)  $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}}$ ; в)  $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ ; г)  $(a^{0,2})^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0,9}$ .

**№6.** Решите уравнение: а)  $\sqrt[4]{x^2 - 10x + 25} = -2$ ; б)  $\sqrt[7]{2x^2 + 6x - 57} = -1$ .

## **3.10. Задания для оценки освоения раздела 10 «Показательная функция»**

### **Практическое занятие №34**

#### **Тема: «Решение показательных неравенств»**

**Цель:** отработать некоторые приемы решения показательных неравенств, научиться приводить показательные неравенства к известным алгебраическим неравенствам, используя свойства степеней, свойства показательной функции и алгебраические преобразования.

**Теоретические  
сведения:**



**Показательным неравенством** называется неравенство, содержащее переменную в показателях степеней при некоторых постоянных основаниях.

При решении показательных неравенств полезно помнить, что показательная функция является монотонной и

- 1) если основание  $a > 1$ , то функция  $y = a^x$  возрастающая (большему  $x$  соответствует больший  $y$ );
- 2) если  $0 < a < 1$ , то функция  $y = a^x$  убывающая (большему  $x$  соответствует меньший  $y$ ).

**1 способ.** Способ приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

- а) привести обе части неравенства к одному основанию, т. е. привести неравенство к виду:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \text{ тогда}$$

- б) если  $a > 1$ , то  $f(x) < g(x)$  (знак неравенства сохраняется);  
если  $0 < a < 1$ , то  $f(x) > g(x)$  (знак неравенства меняется на противоположный).

При решении неравенств можно пользоваться формулами:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	7) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	5) $a^0 = 1$	8) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	6) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	

**Пример 1.**  $4^x > 2^{x-1}$

**Решение.** Приведём неравенство к нужному виду. Для этого у степеней должно быть одно основание 2.

$$2^{2x} > 2^{x-1}$$

Т. к. основание степени  $a=2 > 1$ , то  $2x > x-1$   
 $x > -1$

**Ответ:**  $x \in (-1; +\infty)$



**Пример 2.**  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > (0,25)^{\frac{x^2-2}{2}}$

**Решение.** Приведём степени к одному основанию.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x^2-2}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}$$

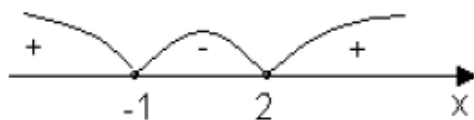
Т. к. основание  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$ , то при сравнении показателей этих степеней необходимо поменять знак неравенства (из двух степеней с одним основанием  $\frac{1}{2}$  большей считается та степень, у которой показатель меньший):

$$x < x^2 - 2; \quad x - x^2 + 2 < 0;$$

$$x^2 - x - 2 > 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2;$$

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$



**Ответ:**  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

**Пример 3.**  $3^{\frac{6x+3}{x^2}} \geq \sqrt[4]{27^{\frac{2x+1}{x}}}$

**Решение.** Приведём степени к одному основанию 3.

$$3^{\frac{6x+3}{x^2}} \geq \left(3^{\frac{2x+1}{x}}\right)^{\frac{3}{4}};$$

$a = 3 > 1$  (знак неравенства сохраняется)

$$\frac{6x+3}{x^2} \geq \frac{6x+3}{4x}$$

Перенесём слагаемое из правой части в левую, приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{4 \cdot (6x+3) - x(6x+3)}{4x^2} \geq 0$$

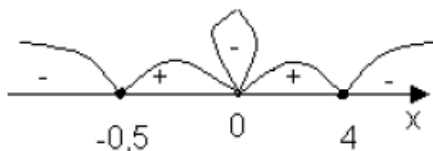
$$\frac{(6x+3)(4-x)}{4x^2} \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов. Для этого на числовую прямую нанесём точки, в которых дробь равна нулю или не существует:

$$x = -\frac{1}{2};$$

$$x = 4;$$

$$x \neq 0$$



**Ответ:**  $[-0,5; 0) \cup (0; 4]$

**Пример 4.**  $4^{x+2} - 3 \cdot 4^{x-1} < 122$

**Решение.** Применим формулу 1  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ , тогда неравенство примет вид:

$$4^x \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^x \cdot 4^{-1} < 122;$$

$$4^x \cdot 16 - \frac{3}{4} \cdot 4^x < 122$$

Вынесем неизвестную степень  $4^x$  за скобки и разделим неравенство на число, получившееся в скобках.

$$4^x \cdot \left(16 - \frac{3}{4}\right) < 122;$$

$$4^x \cdot \frac{61}{4} < 122; \quad 4^x < 122 \cdot \frac{4}{61};$$

$$4^x < 8; \quad 2^{2x} < 2^3;$$

$$2x < 3; \quad x < \frac{3}{2}$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty; 1,5)$

**2 способ.** Способ введения новой переменной.

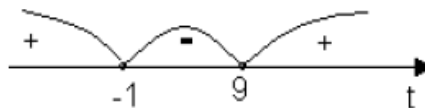
**Пример.**  $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$

**Решение.**  $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 < 0; \quad (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$ . Заменим  $\underline{3^x = t}$ , тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 8t - 9 < 0;$$

$$t_1 = -1; \quad t_2 = 9;$$

$$(t+1) \cdot (t-9) < 0$$



$$t \in (-1; 9) \text{ или } -1 < t < 9$$

$$-1 < 3^x < 9$$

$$\begin{cases} 3^x > -1 \\ 3^x < 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x < 2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 2)$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty; 2)$

**Образцы решения неравенств:**

$3^x < 81$ $3^x < 3^4$ $x < 4$ <b>Ответ:</b> $(-\infty; 4)$ .	$3 > 1,$ $y = 3^x$ <b>возр.</b>	$3^{6-x} > 1$ $3^{6-x} > 3^0$ $6-x > 0$ $-x > -6$ $x < \frac{-6}{-1}$ $x < 6$ <b>Ответ:</b> $(-\infty; 6)$ .	$3 > 1,$ $y = 3^x$ <b>возр.</b>
$3^x < 5^x$	$0 < \frac{3}{5} < 1,$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$	$0 < \left(\frac{3}{4}\right) < 1,$

$\frac{3^x}{5^x} < 1$ $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ убыв. $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^0$ $x > 0$ Ответ: $(0; \infty)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{-2x-5}$ $y = \left(\frac{3}{4}\right)^t$ убыв. Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; \infty\right)$ $x-3 \geq -2x-5$ $x+2x \geq -5+3$ $3x \geq -2$ $x \geq -\frac{2}{3}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убыв. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $0 < \frac{1}{2} < 1$ $x > -2$ Ответ: $x > -2$	$2^x < \frac{1}{4}$ $2^x < 2^{-2}$ $x < -2$ $2 > 1$ $y = 2^x$ возр. Ответ: $x < -2$

### Содержание практической работы:

Решить показательные неравенства:

В-1	В-2	В-3	В-4
$4^x > 16$	$5^x > 25$	$6^x > 216$	$2^x > 16$
$5^{3x} > 25$	$6^{3x} > 216$	$4^{2x} > 16$	$4^{3x} > 64$
$2^x > 3^x$	$4^x < 5^x$	$3^x < 4^x$	$6^x < 7^x$
$3^{x+1} < 9$	$2^{x+1} < 16$	$5^{x+1} < 125$	$2^{x+1} > 4$
$\left(\frac{1}{6}\right)^x < \frac{1}{36}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^x < \frac{1}{125}$
$6^x > 1$	$8^x > 1$	$4^x > 1$	$9^x > 1$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} < 27$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} < 125$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < 64$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} < 81$

### Контрольная работа №9 по теме: «Показательная функция»

#### Вариант 1

1. Решить показательные неравенства:

- а)  $2^x > 16$  б)  $4^{3x} > 64$  в)  $6^x < 7^x$  г)  $2^{x+1} > 4$

2. Решите уравнения:

а)  $\left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{27}{64}\right)^{-7}$ ;

б)  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$ ;

в)  $7^x + 5 \cdot 7^{x-2} = 378$ .

3. Найдите наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству:  $8^{x+2} < \frac{1}{8}$ .

4. Решите неравенство:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < \frac{1}{8}$ .

5. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} 10^{2x-y} = 1000, \\ 2^{x-1,5y} = 4. \end{cases}$$

### Вариант 2

1. Решить показательные неравенства:

а)  $2^x > 16$    б)  $4^{3x} > 64$    в)  $6^x < 7^x$    г)  $2^{x+1} > 4$

2. Решите уравнения:

а)  $\left(\frac{16}{9}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$ ;

б)  $4^x + 2^x - 2 = 0$ ;

в)  $4^{x+1} + 15 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$ .

3. Найдите наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству:  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} < \sqrt{2}$ .

4. Решите неравенство:  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+x^2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$ .

5. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} 15^{x+2y} = 225, \\ 4x - 2y = 4. \end{cases}$$

### 3.11. Задания для оценки освоения раздела 11 «Логарифмы. Логарифмическая функция»

#### Практическое занятие №35

Тема: «Свойства логарифмов. Операция логарифмирования»

Цель: закрепить понятие логарифма, умение использовать основные свойства логарифмов в процессе выполнения различных операций.

**Теоретические сведения:  
СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ**

1.  $\log_a a = 1$  при  $a > 0, a \neq 1$ ;
2.  $\log_a 1 = 0$  при  $a > 0, a \neq 1$ ;
3.  $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$ ;
4.  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$ ;
5.  $\log_a b^p = p \log_a b$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ;
6.  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ .

**Полезно также знать и другие свойства логарифмов:**

7.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ ;
8.  $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ;
9.  $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

**Полезно также знать и «хитрости» свойств логарифмов:**

- $\log_a b^2 = 2 \log_a |b|$  при  $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$ ;
- $\log_a (bc) = \log_a (-b) + \log_a (-c)$  при  $a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0$ ;
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a (-b) - \log_a (-c)$  при  $a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0$ .
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$  при  $a > 0, b > 0, b \neq 0, c > 0$ .

**Логарифм по основанию 10 называется десятичным логарифмом:**  $\log_{10} a = \lg a$

**Десятичным логарифмом** называется логарифм по основанию 10. Он обозначается **lg**, т.е.  $\log_{10} N = \lg N$ . Логарифмы чисел 10, 100, 1000, ... равны соответственно 1, 2, 3, ..., т.е. имеют столько положительных единиц, сколько нулей стоит в логарифмируемом числе после единицы. Логарифмы чисел 0.1, 0.01, 0.001, ... равны соответственно -1, -2, -3, ..., т.е. имеют столько отрицательных единиц, сколько нулей стоит в логарифмируемом числе перед единицей (считая и нуль целых). Логарифмы остальных чисел имеют дробную часть, называемую *мантиссой*. Целая часть логарифма называется *характеристикой*. Для практического применения десятичные логарифмы наиболее удобны.

**Натуральным логарифмом** называется логарифм по основанию  $e$ . Он обозначается **ln**, т.е.  $\log_e N = \ln N$ . Число  $e$  является иррациональным, его приближённое значение 2.718281828. Оно является пределом, к которому стремится число  $(1 + 1/n)^n$  при неограниченном возрастании  $n$ .

**Логарифм по основанию  $e$  называется натуральным логарифмом:**  $\log_e a = \ln a$

**Примеры с решениями:**

1. Найдите значение выражения  $\log_2 6 + \log_2 10 \frac{2}{3}$ .

*Решение.*  $\log_2 6 + \log_2 10 \frac{2}{3} = \log_2 6 + \log_2 \frac{32}{3} = \log_2 \frac{6 \cdot 32}{3} = \log_2 64 = 6$ .

2. Найдите значение выражения  $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ .

*Решение.*  $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3 = \log_{0,2} (75 : 3) = \log_{0,2} 25 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2$ .

3. Вычислите  $\log_9 27$ .

*Решение.*  $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3 \log_3 3}{2 \log_3 3} = \frac{3}{2}$ .

4. Известно, что  $\log_5 2 = a$ . Найдите  $\log_2 80$ .

*Решение.*  $\log_2 80 = \log_2 (16 \cdot 5) = \log_2 16 + \log_2 5 = 4 + \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{a} = \frac{4a+1}{a}$ .

5. Найдите значение выражения  $-\log_8 \log_2 \sqrt[8]{4}$ .

*Решение.*  $-\log_8 \log_2 \sqrt[8]{4} = -\log_8 \log_2 \sqrt[32]{2^2} = -\log_8 \log_2 2^{\frac{1}{16}} = -\log_8 \frac{1}{16} = -\log_8 16^{-1} = \log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3}$ .

6. Найдите  $\lg 45$ , если  $\lg 3 = a$ ,  $\lg 2 = b$ .

*Решение.*  $\lg 45 = \lg (9 \cdot 5) = \lg 9 + \lg 5 = \lg 3^2 + \lg \frac{10}{2} = 2 \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = 2a + 1 - b$ .

### **Содержание практической работы:**

#### ***Вариант 1***

**№ 1.** Вычислите значение  $x$ :

$$\begin{array}{lll} 1) \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{8} = x; & 2) \log_x 0,125 = -3; & 3) \log_{16} x = \frac{3}{4}; \\ 4) \log_6 x = -2 & 5) \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = x & \end{array}$$

**№ 2.** Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{l} \text{а) } (2^{\log_2 \sqrt[4]{3}})^{-4} \\ \text{б) } \frac{\log_{27} 81 - \log_{27} 9}{\lg 150 - \lg 15} \\ \text{в) } \frac{\log_2 7 + \log_2 \frac{16}{7}}{\log_2 7 + \log_2 \frac{16}{7}} \end{array}$$

**№ 3.** Сравните числа:

$$\text{а) } \log_4 3 \text{ и } \log_4 4;$$

- б)  $\log_{\frac{1}{7}} 5$  и  $\log_{\frac{1}{7}} 6$  ;  
 в)  $\log_2 3 + \log_2 4$  и  $\log_2 (3+4)$  ;  
 г)  $\log_2 3,8$  и  $\log_2 4,7$  ;  
 д)  $\log_{\sqrt{2}} 3$  и 1

№ 4. Прологарифмировать выражение  $\frac{5a^3b^4c}{3x^3y}$  по основанию 3.

### Практическое занятие №36

#### Тема: «Логарифмическая функция, её свойства»

**Цель:** закрепить понятие логарифмической функции, умение использовать основные свойства логарифмической функции в процессе выполнения практических задач.

#### **Теоретические сведения:**

**Определение.** Логарифмом числа  $b > 0$  по основанию  $a > 0, a \neq 1$  называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ .

#### **Основные свойства логарифмов:**

- 1°.  $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$ ;
- 2°.  $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$ .
- 3°.  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ .
- 4°.  $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$ .
- 5°.  $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ , для любого действительного  $p$ .

**Основное логарифмическое тождество:**  $a^{\log_a b} = b$

**Определение:** Функцию, заданную формулой  $y = \log_a x$  называют логарифмической с основанием  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

#### **Основные свойства логарифмической функции:**

1. Областью определения является все множество положительных действительных чисел.
2. Областью значения является все множество действительных чисел.
3. График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).
4. Логарифмическая функция возрастает при  $a > 1$ , и убывает при  $0 < a < 1$ .
5. Функция не является четной или нечетной.
6. Функция не имеет точек максимума и минимума, в области определения непрерывна.

#### Содержание практической работы:



### Вариант 1

- 1) Построить графики функции  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
- 2) Привести 3 примера возрастающей логарифмической функции
- 3) Привести 3 примера убывающей логарифмической функции
- 4) Схематически изобразить графики функций  $y = \log_6 x$ ,  
 $y = \log_{0,4} x$
- 5) Найти область определения функции  $y = \log_6(x^2 + 4x - 5)$

### Вариант 2

- 1) Построить графики функции  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
- 2) Привести 3 примера возрастающей логарифмической функции
- 3) Привести 3 примера убывающей логарифмической функции
- 4) Схематически изобразить графики функций  $y = \log_{0,6} x$ ,  
 $y = \log_8 x$
- 5) Найти область определения функции  $y = \log_9(x^2 - 7x + 12)$

### Практическое занятие №37

#### Тема: «Три основных метода решения логарифмических уравнений»

**Цель:** закрепить понятие логарифмического уравнения, умение использовать основные методы решения логарифмических уравнений.

#### **Теоретические сведения:**

**Определение.** Логарифмом числа  $b > 0$  по основанию  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ .

**Основное логарифмическое тождество:**  $a^{\log_a b} = b$

#### 3 основных метода решения логарифмических уравнений

**Логарифмическое уравнение** — уравнение, в котором неизвестные переменные находятся внутри логарифмов.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида  $\log_a x = b$ .

Процесс решения любого логарифмического уравнения сводится к приведению логарифмического уравнения к виду  $\log_a (f(x)) = \log_a (g(x))$ , и переходе от уравнения с логарифмами к уравнению без них:  $f(x) = g(x)$ .

**ОДЗ (Область допустимых значений) для логарифмического уравнения:**

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

**1 метод. Использование определения логарифма:**

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

**2 метод. Использование свойств логарифма:**

- $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$
- $c \cdot \log_a b = \log_a b^c$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right)$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$
- $\log_a 1 = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$
- $\log_a a = 1 \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$

**3 метод. Введение новой переменной (замена):**

Замена  $\log_a x = t$  позволяет свести логарифмическое уравнение к более простому алгебраическому уравнению относительно  $t$ .

**Пример 1.** Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_2(4 - x) = 7$$

$$\text{Решение: } 4 - x = 2^7 \quad 4 - x = 128 \quad -x = 128 - 4 \quad -x = 124 \quad x = 124: (-1) \quad x = -124$$

$$\text{Проверка: } \log_2(4 - (-124)) = 7 \quad \log_2 128 = 7 \quad 2^7 = 128$$

Ответ: - 124.

**Пример 2.** Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_5(x + 1) + \log_5(x - 1) = 3 \log_5 2$$

Решение. Представим левую часть уравнения в виде логарифма произведения, а правую сведем к логарифму по основанию 5:

$$\log_5(x + 1)(x - 1) = \log_5 2^3.$$

Полученное уравнение на множестве допустимых значений  $x$ , задаваемых системой неравенств

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \left( \Rightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \right),$$

эквивалентно уравнению  $(x + 1)(x - 1) = 2^3$ . Это уравнение легко решить:  $x^2 - 1 = 8$ ,  $x^2 = 9$ ,  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -3$ . Области допустимых значений удовлетворяет лишь первый корень.

Ответ. 3.

**Пример 3.** Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0.$$

Решение. Уравнения подобного вида, где неизвестная функция (в данном случае  $\log_2 x$ ) входит в различных степенях, решаются методом замены переменной. Обозначим  $\log_2 x = y$ . Вместо исходного уравнения получим

$$y^2 - y - 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение легко решается:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad y_1 = 2; \quad y_2 = -1.$$

Найдем теперь искомые значения  $x$ :

$$y_1 = \log_2 x = 2, \quad x_1 = 4;$$

$$y_2 = \log_2 x = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Оба эти значения  $x$  удовлетворяют исходному уравнению, так как область его допустимых значений есть множество  $x > 0$ .

Ответ. 4;  $\frac{1}{2}$ .

### Содержание практической работы:

#### 1 вариант

Решите уравнение:

$$1) \log_3(2x - 11) = 2;$$

5)

$$2) \log_4(2x - 7) = 0;$$

$$3) \log_{\frac{1}{6}}(3x+12) = -1; \quad 4) \log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2 \log_2 3 \quad 5) 2 \log_3^2 x - 7 \log_3 x + 3 = 0.$$

## 2 вариант

$$\begin{aligned} 1) & \log_4(3x-2) = 3; \\ 2) & \log_3(4x-10) = 2; \\ 3) & \log_{\frac{1}{2}}(2x+16) = -2; \\ 4) & \log_2(x+3) + \log_2(x+2) = \log_2 6. \\ 5) & \log_3 x - 3 \log_3 x + 2 = 0. \end{aligned}$$

## Практическое занятие №38

### Тема: «Системы логарифмических уравнений»

**Цель:** закрепить понятие логарифмического уравнения, умение использовать основные методы решения логарифмических уравнений и систем логарифмических уравнений.

### **Теоретические сведения:**

**Определение.** Логарифмом числа  $b > 0$  по основанию  $a > 0, a \neq 1$  называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ .

**Основное логарифмическое тождество:**  $a^{\log_a b} = b$

### 3 основных метода решения логарифмических уравнений

**1 метод. Использование определения логарифма:**

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, \quad a > 0, a \neq 1.$$

**2 метод. Использование свойств логарифма:**

- $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$
- $c \cdot \log_a b = \log_a b^c$
- $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right)$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$
- $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$
- $\log_a a = 1 (a > 0, a \neq 1)$

### 3 метод. Введение новой переменной (замена):

Замена  $\log_a x = t$  позволяет свести логарифмическое уравнение к более простому алгебраическому уравнению относительно  $t$ .

**Пример 1.** Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} 9^x \cdot 3^x = 81 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \log_3 (x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3 (x-2y) \\ \log_{\frac{1}{4}} (x-2y) = -1 \end{cases}$$

Решение 1 системы:  $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^4 \\ \log_3 (x \cdot y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x \cdot y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-y \\ (4-y) \cdot y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$

ОДЗ:  $x > 0$  и  $y > 0$

$y_1=1$ ;  $y_2=3$  тогда  $x_1=3$  и  $x_2=1$ , т.е.  $x_1=3$ ,  $y_1=1$ ;  $x_2=1$ ,  $y_2=3$

**Ответ:**  $(3,1) \in \text{ОДЗ}$ ;  $(1,3) \in \text{ОДЗ}$

Решение 2 системы:

$$2. \begin{cases} \log_3 (x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3 (x-2y) \\ \log_{\frac{1}{4}} (x-2y) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2y}{16} = \frac{3}{x-2y} \\ x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=48 \\ x=2y+4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > -2y \\ x > 2y \end{cases} \Rightarrow x > 2y$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} (2y+4)^2 - 4y^2 = 48 \\ x = 2y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16y+16=48 \\ x=2y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=8 \end{cases} \text{ Ответ. } x=8; y=2 \in \text{ОДЗ } (8 > 2 \cdot 2)$$

### Содержание практической работы:

#### 1 вариант

Решить системы уравнений:

$$1) \begin{cases} \log_3 x^2 = \log_3 125 - \log_3 5 \\ \log_3 (y-1) = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \log_2 (x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1 \\ (3x - y) = 2 \end{cases}$$

### Практическое занятие №39

#### Тема: «Применение логарифма»

**Цель:** изучить историю возникновения и природную сущность логарифмов, рассмотреть практическое применение логарифмов человеком, совершенствовать навык самостоятельного получения и обработки информации.

#### Содержание практической работы:

**Оформить отчет (с использованием иллюстративного материала) по следующему**

### **плану:**

- 1) История возникновения логарифмов.
- 2) Природная сущность логарифмов.
- 3) Логарифмы в природе.
- 4) Логарифмы в различных сферах жизнедеятельности человека.
- 5) Заключение по теме практической работы № 39.

*Каждый пункт плана раскрывается не менее чем 5-7 предложениями, на основании которых делается вывод по каждому разделу отчета.*

*По желанию студентов формируется отчетная электронная презентация по материалам практической работы №39.*

В завершение ПР №39 (для раскрытия пункта 5 плана) необходимо просмотреть демонстрационный материал по теме практической работы (ссылка <https://infourok.ru/proektnaya-rabota-logarifmi-i-ih-primenenie-v-zhizni-1791752.html>)

### **Практическое занятие №40**

#### **Тема: «Логарифмическая спираль в природе. Её математические свойства»**

**Цель:** изучить историю возникновения и природную сущность логарифмов, рассмотреть логарифмическую спираль, её математические свойства, совершенствовать навык самостоятельного получения и обработки информации.

#### **Содержание практической работы:**

**Оформить отчет (с использованием иллюстративного материала) по следующему плану:**

- 1) Практическая значимость понятия логарифм.
- 2) Логарифмическая спираль.
- 3) Примеры и математические свойства логарифмической спирали.
- 4) Заключение по теме практической работы № 40.

*Каждый пункт плана раскрывается не менее чем 5-7 предложениями, на основании которых делается вывод по каждому разделу отчета.*

*По желанию студентов формируется отчетная электронная презентация по материалам практической работы №40.*

В завершение ПР №40 (для раскрытия пункта 4 плана) необходимо просмотреть демонстрационный материал по теме практической работы (ссылка

**Контрольная работа №10 по теме: «Логарифмы. Логарифмическая функция»**

**Вариант 1**

1. Изобразите схематично график функции  $y = \log_{0,3} x$ .

Сравните значения функций  $\log_{0,3} 2,7$  и  $\log_{0,3} 10$ . Ответ обоснуйте.

2. Вычислите  $\log_{\frac{1}{5}} 24 - \log_{\frac{1}{5}} 120 - \log_{\frac{1}{5}} 5$ .

3. Решите уравнение  $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$

4. Решите неравенство  $\log_{8,2}(x - 3) \geq 0$ .

5. Решите уравнение  $5^{2\log_5 x} = 1$ .

**Вариант 2**

1. Изобразите схематично график функции  $y = \log_{3,5} x$

Сравните значения функций  $\log_3 0,6$  и  $\log_3 7,2$ . Ответ обоснуйте.

2. Вычислите  $\log_3 12 + \log_3 4,5 - \log_3 6$ .

3. Решите уравнение  $\log_{0,2}^2 x + 4 \log_{0,2} x - 5 = 0$

4. Решите неравенство  $\ln(x - 3) > \ln(2x - 8)$ .

5. Вычислите  $\sqrt{2}^{4+\log_2 \sqrt{3}}$

**3.12. Задания для оценки освоения раздела 12 «Множества. Элементы теории графов»**

**Практическое занятие №41**

**Тема: «Операции с множествами».**

**Цель:** закрепить понятие множества, на конкретных примерах научиться применять правила операций над множествами, продолжить формирование умений самостоятельно выполнять операции с множествами.

**Теоретические сведения к практической работе:**

Множество – одно из основных понятий математики.

*Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком.* Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множества строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ , то записывают  $x \in X$  ( $\in$  — принадлежит).

Если множество  $A$  является частью множества  $B$ , то записывают  $A \subset B$  ( $\subset$  — содержится).

**Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.**

Два множества  $A$  и  $B$  **равны** ( $A=B$ ), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{3,1,4,2\}$  то  $A=B$ .

**Объединением (суммой)** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B$ , элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если  $A=\{1,2,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ , то  $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

**Пересечением (произведением)** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B$ , элементы которого принадлежат как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ .

Например, если  $A=\{1,2,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,2\}$ , то  $A \cap B = \{2,4\}$

**Разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A/B$ , элементы которого принадлежат множеству  $A$ , но не принадлежат множеству  $B$ .

Например, если  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5\}$ , то  $A/B = \{1,2\}$

**Симметричной разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \Delta B$ , являющееся объединением разностей множеств  $A/B$  и  $B/A$ , то есть  $A \Delta B = (A/B) \cup (B/A)$ .

Например, если  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ , то  $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

### **Свойства:**

#### **Свойства перестановочности:**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

#### **Сочетательное свойство:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

**Круги Эйлера (Эйлера-Венна)** — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

### **Содержание практической работы:**

#### **Задания:**

1. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным:

а) Интервал  $(-12;13)$  является подмножеством отрезка  $[-13;15]$

б) Множество действительных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел

в) Промежуток  $(-14;3]$  является подмножеством отрезка  $[-15;0]$

2. Укажите пару  $(x;y)$ , находящуюся в отношении  $y=x-2$



- а) (5;3)
- б) (-3;5)
- в) (3;-5)

3. Даны множества:  $A=\{5,10,15,20\}$ ,  $B=\{3,6,9,12,15\}$ .

Установите соответствие между следующими множествами А и В

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\{15\}$                  | ? объединение множеств А и В |
| 2. $\{3,5,6,9,10,12,15,20\}$ | ? разность множеств А и В    |
| 3. $\{5,10,20\}$             | ? пересечение множеств А и В |

4. Даны множества: а)  $A=\{e, o, p, x\}$ ,  $B=\{x,y\}$ .

б)  $A=\{12, 13, 14, 15\}$   $B=\{12, 14, 16\}$

Найти множества  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A/B$ ,  $B/A$

5. В трёх восьмых классах 70 ребят. Из них 27 занимаются в шахматном кружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются теннисом. В шахматном кружке 10 ребят из хора, в хоре 6 теннисистов, в шахматном кружке 8 теннисистов; 3 теннисиста посещают и шахматный кружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются теннисом и не занимаются в шахматном кружке? Сколько ребят заняты только теннисом?

### Практическое занятие №42

**Тема: «Графы».**

**Цель:** закрепить базовые понятия теории графов, формы и методы представления графов, учиться представлять граф графически, представлять с помощью графов бинарные отношения, совершенствовать навыки применения простейших методов анализа графов.

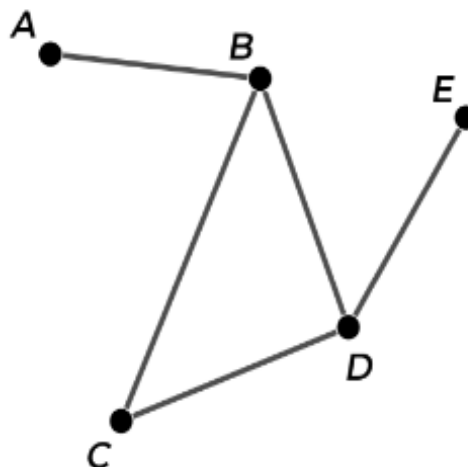
#### Примеры задач:

##### №1

*Степень вершины* — это количество рёбер, концом которых является эта вершина.

Посчитаем степени верши

1.



У вершины *A* степень 1, у вершины *B* — 3, у вершины *C* — 2, у вершины *D* — 3, у вершины *E* — 1.



У вершины «Андрей» степень 3, у вершины «Вася» степень 1, у вершины «Евгений» степень 0, у вершины «Дима» степень 2, у вершины «Саша» степень 2.

*Изолированная вершина* — это вершина графа, степень которой равна нулю.

## №2

На этой неделе в классе шестеро дежурных: Аня, Вера, Евгений, Данила, Сергей и Фёдор. Рассмотрим следующий граф: дежурные — это вершины графа, две вершины соединены ребром, если соответствующие ребята дружат между собой. Получившийся граф изображён ниже.



Сколько рёбер в этом графе?

С какими дежурными дружит Евгений?

**Ответ: 7; Фёдор, Сергей.**

### №3

*Утверждение.* Количество рёбер в графе равно половине суммы степеней всех его вершин.

В графе 7 вершин, степени которых равны 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Сколько рёбер в этом графе?

Ответ: 7.

### Задания для самостоятельной работы к пз №42:

#### №1

Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс, Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса? Проиллюстрируйте ответ, построив соответствующий граф (ы).

#### №2

Найти на рисунке 1 графы, изоморфные данному:

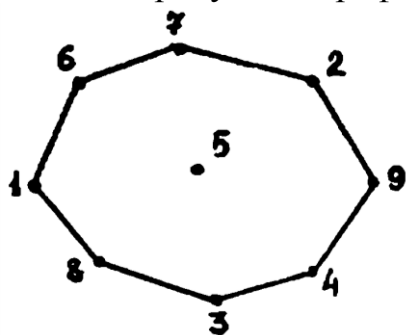
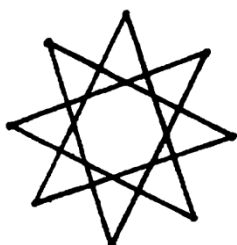
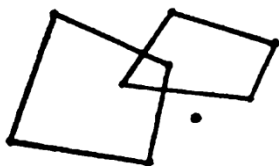


Рисунок 1

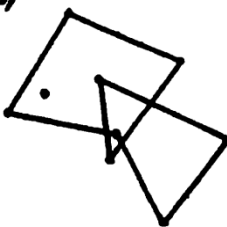
а)



б)



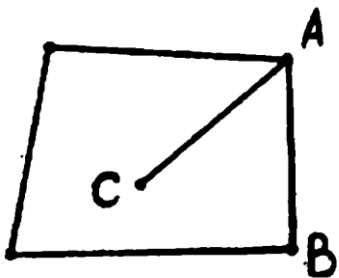
в)



**Указание:** правильно занумеруйте вершины графов на рисунке 1 для ответа на вопрос.

#### №3

Определите степени вершин данного графа:



#### №4

В селе Малышково 13 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими? Решите задачу, дав пояснение с помощью базовых понятий теории графов.

### Контрольная работа №11 по теме: «Множества. Элементы теории графов»

#### Вариант 1 (2)

1. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным:

- а) Интервал  $(-12;13)$  является подмножеством отрезка  $[-13;15]$
- б) Множество действительных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел
- в) Промежуток  $(-14;3]$  является подмножеством отрезка  $[-15;0]$

2. Укажите пару  $(x;y)$ , находящуюся в отношении  $y=x-4$  ( $y = x - 8$ )

- а)  $(5;1)$
- б)  $(-3;5)$
- в)  $(3;-5)$

3. Даны множества:  $A=\{5,10,15,20\}$ ,  $B=\{3,6,9,12,15\}$ .

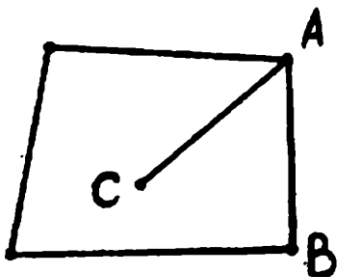
Установите соответствие между следующими множествами А и В

4.  $\{15\}$  ? объединение множеств А и В

5.  $\{3,5,6,9,10,12,15,20\}$  ? разность множеств А и В

6.  $\{5,10,20\}$  ? пересечение множеств А и В

4. Определите степени вершин данного графа:



5. В селе Малышково 17 (11) телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы

каждый телефон был соединен ровно с пятью другими? Решите задачу, дав пояснение с помощью базовых понятий теории графов.

### **3.13. Задания для оценки освоения раздела 13 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»**

#### **Практическое занятие №43**

#### **Тема: «Основные понятия комбинаторики»**

**Цель:** отработать умение решать задачи на расчет выборов (перестановок, размещений, сочетаний) с применением элементов и формул комбинаторики, развивать самостоятельную мыслительную деятельность, а также вычислительные навыки и творческое мышление студентов.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

##### **ПЕРЕСТАНОВКИ**

Произведение первых  $n$  натуральных чисел обозначают  $n!$  (читается «эн факториал»), т. е.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ , причём по определению  $1! = 1$ . Таким образом,

$$P_n = n!$$

**Определение.** Перестановками из  $n$  элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же  $n$  элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

##### **РАЗМЕЩЕНИЯ**

**Определение.** Размещениями из  $m$  элементов по  $n$  элементов ( $n \leq m$ ) называются такие соединения, каждое из которых содержит  $n$  элементов, взятых из данных  $m$  разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

$$A_m^n = \frac{m!}{(m - n)!}.$$

##### **СОЧЕТАНИЯ**

**Определение.** Сочетаниями из  $m$  элементов по  $n$  в каждом ( $n \leq m$ ) называются соединения, каждое из которых содержит  $n$  элементов, взятых из данных  $m$  разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

### **Задания для практической работы**

#### **1 вариант.**

1. Решите уравнение:  $A_x^4 \cdot P_{x-4} = 42 \cdot P_{x-2}$
2. Сколькими способами могут разместиться пять человек вокруг круглого стола?
3. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1;2;5;8;9 так чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
4. В бригаде из двадцати пяти человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?
5. В вазе с фруктами лежит 12 персиков и 9 слив. Сколькими способами можно выбрать 4 персика и 3 сливы?

#### **2 вариант.**

1. Решите уравнение:  $12 \cdot C_{n+3}^{n-1} = 55 \cdot A_{n+1}^2$
2. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг?
3. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют семь команд?
4. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
5. На полке стоит 4 энциклопедии и 11 детективов. Сколькими способами можно выбрать пять детективов и две энциклопедии?

### **Практическое занятие №44**

**Тема: «Относительная частота события, свойство её устойчивости»**

**Цель:** закрепить понятие относительной частоты события, понимание свойства

устойчивости относительной частоты события, отработать умение решать задачи на расчет относительной частоты события, развивать самостоятельную мыслительную деятельность, а также вычислительные навыки и творческое мышление студентов.

### Теоретические сведения:

**Относительной частотой** события называют отношение числа испытаний  $m$ , в которых данное событие появилось, к общему числу  $n$  фактически проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \text{ или короче: } \omega = \frac{m}{n}$$

**Относительная частота** наряду с **вероятностью** является одним из ключевых понятий ТВ и МС, но если **классическое** либо **геометрическое определение вероятности** не требуют проведения испытаний, то относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство **устойчивости**, то есть колеблется около определённого значения.

Пусть некий профессиональный стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 83 раза.

$$\omega = \frac{83}{100} = 0,83$$

Тогда относительная частота поражения цели составит:

Предположим, что тот же самый стрелок в точно такой же «форме» и в приблизительно таких же условиях снова провёл серию из 100 выстрелов. Вероятно ли, что он снова попадёт 83 раза? Не очень. Но количество попаданий вряд ли будет сильно отличаться от предыдущего результата. Пусть, например, стрелок попал 79 раз. Тогда

$$\omega = \frac{79}{100} = 0,79$$

относительная частота поражения цели составит:

В третьей серии из 100 выстрелов, проведённой при похожих обстоятельствах, данный

стрелок попал 81 раз,  $\omega = \frac{81}{100} = 0,81$  и т.д.

Иногда могут случаться блестящие серии более 90 попаданий, иногда «провалы», но среднее количество попаданий будет варьироваться около 80. И когда количество фактически проведенных испытаний станет достаточно большим, то речь зайдёт о **статистической вероятности**. Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за **статистическую вероятность события** принимают относительную частоту данного события либо

близкое число.

Предположим, что на протяжении нескольких лет наш спортсмен, сохраняя стабильный уровень подготовки, совершил 10000 выстрелов и попал 8037 раз.

Относительная частота поражения цели составит:  $\omega = \frac{8037}{10000} = 0,8037$  и за статистическую

вероятность его результативности целесообразно принять  $p = 0,8$ , которая становится теоретической оценкой, например, перед грядущими соревнованиями.

Именно так собирается богатая спортивная статистика в различных видах спорта.

Аналогичная история с утверждением «Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке равна 0,05». Эту оценку невозможно получить с помощью **классического определения вероятности** – она следует только из практики! Если на станке произведены десятки тысяч деталей и на каждую, скажем, тысячу выпущенных деталей, приходится в среднем 50 бракованных, то в качестве статистической вероятности брака принимается значения  $p = 0,05$ .

Вот, например, во многих задачах фигурирует вероятность рождения мальчика  $p = 0,52$ . Откуда взялось данное число? Из многолетнего подсчёта фактически рождённых детей в определённом регионе. Это вовсе не значит, что среди 100 новорожденных будет ровно 52 мальчика. В следующей сотне рождённых их может оказаться, например, 45,

и относительная частота  $\omega = \frac{45}{100} = 0,45$  будет далека от истины. Но если рассмотреть выборку в тысячи и десятки тысяч младенцев, то  $\omega$  отклонится от  $p = 0,52$  совсем-совсем незначительно. **И это уже не случайность.** Как известно, такое соотношение новорожденных сложилось эволюционно – по причине бОльшей смертности мужчин.

В учебном пособии В.Е. Гмурмана есть весьма удачный пример, в котором продемонстрировано, как при подбрасывании монеты относительная частота

появления орла приближается к своей вероятности  $p = \frac{1}{2}$  (полученной по классическому определению):

Количество бросков монеты, $n$	Число появлений орла, $m$	Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Какой можно сделать вывод? С увеличением количества независимых испытаний **случайность превращается в закономерность.**

### Содержание практической работы:



**№1** Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Вычислить относительную частоту появления нестандартных деталей.

**№2** По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Вычислить относительную частоту поражения цели.

**Замечание.** *Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.*

**№3** По данным шведской статистики, относительная частота рождения девочек за 1935 г. по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Найти приближенное значение относительной частоты рождения девочек за 1935 год, округлив ответ до тысячных.

### **Практическое занятие №45**

#### **Тема: «Статистическое определение вероятности. Оценка вероятности события»**

**Цель:** отработать умение решать задачи на вычисление вероятностей с использованием статистического определения вероятности, учить выполнению оценки вероятности события, развивать самостоятельную мыслительную деятельность, а также вычислительные навыки и творческое мышление студентов.

#### **Теоретические сведения к практической работе:**

##### **ПЕРЕСТАНОВКИ**

Произведение первых  $n$  натуральных чисел обозначают  $n!$  (читается «эн факториал»), т. е.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ , причём по определению  $1! = 1$ . Таким образом,

$$P_n = n!$$

##### **РАЗМЕЩЕНИЯ**

$$A_m^n = \frac{m!}{(m - n)!}.$$

## СОЧЕТАНИЯ

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

**Определение.** Вероятностью  $P(A)$  события  $A$  в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , к числу  $n$  всех исходов испытания.

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leq n.$$

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

а также

$$P(V) = 0, P(U) = 1,$$

где  $V$  — невозможное событие;  $U$  — достоверное событие.

**Теорема 1.** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

**Определение.** События  $A$  и  $B$  называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

### Задания для практической работы

№1(1,3 -1 вариант,2,4 – 2  
вариант)

Выяснить, являются ли события  $A$  и  $B$  независимыми, если:

1)  $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B) = \frac{10}{13}$ ,  $P(AB) = \frac{4}{13}$ ;

2)  $P(A) = 0,75$ ,  $P(B) = 0,2$ ,  $P(AB) = 0,15$ ;

3)  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,2$ ,  $P(AB) = 0,6$ ;

4)  $P(A) = \frac{3}{14}$ ,  $P(B) = \frac{7}{12}$ ,  $P(AB) = \frac{1}{4}$ .

№2

(1 вариант)

В первой партии из 20 деталей 6 нестандартных, а во второй партии из 30 деталей 5 нестандартных. Наугад из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали оказались нестандартными; 2) обе детали оказались стандартными; 3) хотя бы одна деталь оказалась стандартной; 4) хотя бы одна деталь оказалась нестандартной.

№2

(2 вариант)

В первой коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй — 5 белых и 9 чёрных. Не глядя из каждой коробки вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба вынутых шара белые; 2) оба вынутых шара чёрные; 3) хотя бы один шар белый; 4) хотя бы один шар чёрный.

№3(1 – 1 вариант, 2 – 2 вариант)

Вероятность попадания по мишени при одном выстреле некоторым стрелком равна 0,8. Найти вероятность попадания по мишени этим стрелком: 1) в каждом из трёх выстрелов; 2) хотя бы одним из трёх выстрелов.

№ 4(1 вариант)

В урне находится 10 зеленых, 6 синих и 4 чёрных шара. Наугад извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что они будут:

а) все зелеными, б) все одного цвета, в) ровно два черных.

№ 4(2 вариант)

В урне находится 12 желтых, 8 красных и 10 оранжевых шаров. Наугад извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что они будут:



а) все желтыми, б) все одного цвета, в) ровно два оранжевых.

**Примечание:** в задаче №4 выполнить округление ответов до тысячных.

### Практическое занятие №46

#### Тема: «Задачи математической статистики»

**Цель:** в ходе решения практических задач закрепить понятия размаха, моды, медианы, среднего выборки, понятие дискретной случайной величины, математического ожидания (среднего значения) дискретной случайной величины, дисперсии, а также среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины.

#### Теоретические сведения к практической работе:

**Мода** (обозначают  $Mo$ ) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки 7, 6, 2, 5, 6, 1 равна 6; выборка 2, 3, 8, 2, 8, 5 имеет две моды:  $Mo_1 = 2$ ,  $Mo_2 = 8$ .

**Медиана** (обозначают  $Me$ ) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна срединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух срединных чисел.

**Среднее** (или **среднее арифметическое**) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины  $X$ , то её среднее обозначают  $\bar{X}$ .

**Определение 1.** Разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины выборки называется её **размахом** и обозначается  $R$ .

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются **дискретными**. **Математическим ожиданием (средним значением)** дискретной случайной величины  $X$  называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности  $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

**Дисперсией** дискретной случайной величины  $X$  называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания  $D(X) = M(X - M(X))^2$ . Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

**Средним квадратичным отклонением** дискретной случайной величины называют

корень квадратный из дисперсии  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

**Пример 1:** Случайная величина  $X$  задана таблицей распределения вероятностей. Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

$x_i$	2	5	8	9
$p_i$	0,1	0,4	0,3	0,2

*Решение:*

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

### Задания для практической работы

#### № 1

Найти дисперсию выборки:

- 1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см;    2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;  
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с;    4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

#### № 2

Найти дисперсию совокупности значений случайной величины  $X$ , заданной частотным распределением:

1) 

$X$	2	3	4	6
$M$	3	2	2	3

2) 

$X$	-1	2	3	4	5
$M$	3	1	2	3	1

#### № 3

Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:

- 1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг;    2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

#### № 4

Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:

- 1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;  
2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

#### № 5

Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:

1)  $-5, -15, 12, -7, 8, 13, -1, -7$ ;

2)  $16, -2, -8, 10, 14, -6, -2, 11$ .

### № 6

Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

### Практическое занятие №47

**Тема: «Нахождение средних характеристик наблюдаемых данных»**

**Цель:** закрепить понятия частоты появления числа в ряду, таблицы частот и таблицы относительных частот; формировать умения составлять таблицы частот, а также находить средние статистические характеристики.

#### Теоретические сведения к практической работе:

*Мода* (обозначают  $Mo$ ) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки  $7, 6, 2, 5, 6, 1$  равна 6; выборка  $2, 3, 8, 2, 8, 5$  имеет две моды:  $Mo_1 = 2$ ,  $Mo_2 = 8$ .

*Медиана* (обозначают  $Me$ ) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна срединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух срединных чисел.

*Среднее* (или *среднее арифметическое*) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины  $X$ , то её среднее обозначают  $\bar{X}$ .

**Определение 1.** Разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины выборки называется её *размахом* и обозначается  $R$ .

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются *дискретными*.



## Задания для практической работы

### № 1

В ходе опроса 40 студентов ГБПОУ «ТПТ» было выяснено, сколько времени (с точностью до 0,5 ч) в неделю они затрачивают на занятия в кружках и спортивных секциях. Получены следующие данные:

5, 1,5, 0, 2,5, 1, 0, 0, 2, 2,5, 3,5,  
4, 5, 3,5, 2,5, 0, 1,5, 4,5, 3, 3, 5,  
3,5, 4, 3,5, 3, 2,5, 2, 1, 2, 2, 4,5,  
4, 3,5, 2, 5, 4, 2, 2,5, 0, 0, 3.

Представьте этот ряд данных в виде таблицы частот.

### № 2

При проверке 70 сочинений преподаватель русского языка и литературы ГБПОУ «ТПТ» Теренина Н.В. фиксировала число орфографических ошибок, допущенных студентами. Полученный ряд данных представлен преподавателем в виде таблицы частот.

<b>Число ошибок</b>	0	1	2	3	4	5	6
<b>Частота</b>	4	6	15	26	12	4	3

- 1) Каково наибольшее различие в числе допущенных студентами ошибок?
- 2) Какое число ошибок является типичным для данной выборки студентов?
- 3) Какие статистические характеристики были использованы при ответе на поставленные вопросы?

### № 3

Для озеленения территории, прилегающей к корпусам ГБПОУ «ТПТ», приобрели 100 пакетов цветочных семян. Определяя степень засоренности семян, выяснили, сколько семян сорных растений содержалось в каждом пакете. Получилась следующая таблица:

<b>Число семян сорных растений</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Число пакетов</b>	3	16	26	17	18	10	3	5	1	1

Для полученного ряда данных найти среднее, моду, размах и медиану.

### № 4

Студентам ССУЗов города Трубчевска была предложена контрольная работа по

математике, содержащая 6 заданий. При подведении итогов составили таблицу, в которой указано число студентов, верно выполнивших одно, два, три и т.д. задания.

Число выполненных заданий	Число студентов
0	-
1	27
2	53
3	87
4	223
5	146
6	89

Пользуясь этой таблицей, составьте таблицу относительных частот (с точностью до 1%)

**Указание:** Относительные частоты вычисляются делением каждого числа из правого столбца на общее число студентов с умножением полученного результата на 100 % (с округлением до 1 %).

**Контрольная работа №12 по теме: «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»**

**Вариант 1**

1. Сколькими способами могут разместиться пять человек вокруг круглого стола?
2. В вазе с фруктами лежит 12 персиков и 9 слив. Сколькими способами можно выбрать 4 персика и 3 сливы?
3. Отдел технического контроля обнаружил 2 нестандартных детали в партии из 50 случайно отобранных деталей. Вычислить относительную частоту появления нестандартных деталей.
4. Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

$$P(A) = \frac{3}{14}, \quad P(B) = \frac{7}{12}, \quad P(AB) = \frac{1}{4}.$$



Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

5.

### Вариант 2

1. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг?
2. На полке стоит 4 энциклопедии и 11 детективов. Сколькими способами можно выбрать пять детективов и две энциклопедии?
3. Отдел технического контроля обнаружил 8 нестандартных деталей в партии из 25 случайно отобранных деталей. Вычислить относительную частоту появления нестандартных деталей.
4. Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

$$P(A) = 0,75, \quad P(B) = 0,2, \quad P(AB) = 0,15;$$

Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

5.

### 3.14. Задания для оценки освоения раздела 14 «Уравнения и неравенства»

#### Практическое занятие №48

#### Тема: «Общие методы решения уравнений»

**Цель:** систематизировать и обобщить знания и умения по применению различных методов решения уравнений.

### Теоретические сведения к практической работе:

#### *I метод*

##### **Замена уравнения**

$$h(f(x)) = h(g(x)) \text{ уравнением } f(x) = g(x)$$

ПРИМЕР. Решить уравнение

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

Решение:

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

**Ответ: 2; 4.**

#### *II метод*

##### **Метод разложения на множители**

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0$$

↓

$$f(x)=0; \quad g(x)=0; \quad h(x)=0.$$

ПРИМЕР. Решить уравнение

$$(\sqrt{x+2}-3)(2^{x^2+6x+5}-1)\ln(x-8)=0$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-8 > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2}-3=0; \quad 2^{x^2+6x+5}-1=0; \quad \ln(x-8)=0$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = -1;$$

$$x_3 = -5$$

$$x_4 = 9$$

Проверка найденных корней.

**Ответ: 9.**

#### *III метод*

##### **Метод введения новой переменной**

$$f(x) = 0 \rightarrow p(g(x)) = 0 \rightarrow p(u) = 0, \text{ (где } u=g(x)) \rightarrow \\ \rightarrow g(x) = u_1; \quad g(x) = u_2; \dots \quad g(x) = u_n$$

ПРИМЕР. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-x+7} = \sqrt{2x^2-2x+21}$$

Решение. Пусть  $x^2 - x = u$ , тогда

$$\sqrt{u+2} + \sqrt{u+7} = \sqrt{2u-21}$$

$$u_1 = 2; \quad u_2 = -11.$$

Проверить корни подставкой.  $u_1 = 2$  – корень,  $u_2 = -11$  – посторонний корень.

$$x^2 - x = 2; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -1.$$

**Ответ: 2; -1.**

#### *IV метод*

##### **Функционально-графический метод**

ПРИМЕР 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x} = |x-2|$$

Решение.

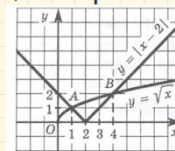
$$1) \quad y = \sqrt{x}$$

$$y = |x-2|$$

$$2) \quad A(1;1), \quad B(4;2)$$

$$3) \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 4.$$

**Ответ: 1; 4.**



ПРИМЕР 2. Решить уравнение  $x^5 + 5x - 42 = 0$

Решение.

1) Подбором находим корень  $x = 2$ .

$$2) \quad x^5 = 5x - 42$$

3)  $y = x^5$  – возрастающая функция

$$y = 5x - 42 \quad \text{– убывающая функция}$$

Значит,  $x = 2$  – единственный корень.

**Ответ: 2.**

### Задания для практической работы:

### Решите уравнения

1.  $5^x = 6 - x$
2.  $\log_{0,8}(9x - 4x^2) = \log_{0,8}(x^3 + 4x^2)$
3.  $\sqrt{\frac{5x+1}{x+3}} + 5\sqrt{\frac{x+3}{5x+1}} = 6$
4.  $3^{x+1} - 29 = -18 \cdot 3^{-x}$
5.  $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$
6.  $(7^{2(x-1)} - 50 \cdot 7^{x-1} + 49 \cdot \sqrt[4]{17 - 8x}) = 0$
7.  $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$
8.  $2x^2 \cdot \cos x + 9 = 18 \cos x + x^2$
9.  $-\cos 7\pi x = x^2 - 6x + 10$
10.  $\cos^2(\pi - x) + \sin 2x = 0$
11.  $\log_5 x - 1 + (x - 5)^3 = 0$
12.  $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 2x - 4$

### Практическое занятие №49

#### Тема: «Графический метод решения уравнений и неравенств»

**Цель:** отработать применение графического (функционально – графического (ФГ) метода), основанного на применении свойств функций и (или) их графических иллюстраций в решении уравнений и неравенств.

#### Теоретические сведения к практической работе:

**Функционально – графический метод решения уравнений и неравенств (ФГ метод)** – это метод, основанный на применении свойств функций и (или) их графических иллюстраций.

В результате анализа научных и методических пособий были выявлены ситуации, в которых используются свойства функций при решении уравнений и неравенств:

- Учет областей определения функций применялся при решении уравнений вида  $f(x) = g(x)$

- Использование свойства ограниченности функций, основанное на том, что если  $f(x) < c$ ,  $g(x) > c$  на множестве  $X$ , то уравнение  $f(x) = g(x)$  равносильно системе:  $\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$ . Такая идея довольно часто встречается у многих авторов, академиков и др.

- Применение свойства монотонности функций.
- Свойство четности и нечетности функции.
- Использование свойства периодичности функции.
- Использование свойства непрерывности функции удобно использовать при доказательстве существования решения уравнения. Также оно лежит в основе решения неравенств методом интервалов.

- Решение задач с параметром чаще всего основано на использовании свойств функций, участвующих в условиях задач

### Функционально-графический метод

**ПРИМЕР 1.** Решить уравнение

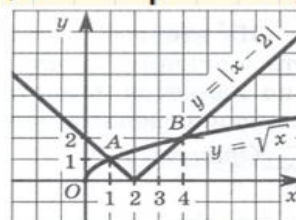
$$\sqrt{x} = |x - 2|$$

1)  $y = \sqrt{x}$   
 $y = |x - 2|$

Решение.

2) A(1;1), B(4;2)

3)  $x_1 = 1$  ;  $x_2 = 4$ .



**Ответ: 1; 4.**

**ПРИМЕР 2.** Решить уравнение  $x^5 + 5x - 42 = 0$

Решение.

1) Подбором находим корень  $x = 2$ .

2)  $x^5 = 5x - 42$

3)  $y = x^5$  - возрастающая функция

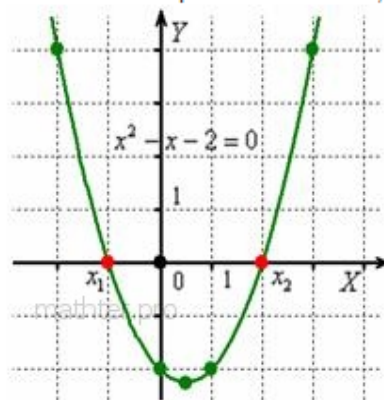
$y = 5x - 42$  - убывающая функция

Значит,  $x = 2$  – единственный корень.

**Ответ: 2.**



функции  $y = f(x)$  и посмотреть, где он пересекает *ось абсцисс*. Там и находятся корни. Если точек пересечения нет, то уравнение не имеет действительных решений.



Так, при решении **квадратного уравнения**  $x^2 - x - 2 = 0$  через дискриминант мы получили корни  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ , но здесь можно просто построить параболу, и всё понятно без комментариев.

Решением неравенства  $f(x) > 0$  являются те промежутки, на которых график  $f(x)$  **выше** оси  $OX$ , и, наоборот,  $f(x) < 0$  – там, где график  $f(x)$  **ниже** оси.

Таким образом, вместо того, чтобы вымучивать неравенство  $x^2 - x - 2 > 0$  **методом интервалов**, просто смотрим на график и ответ готов:  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ .

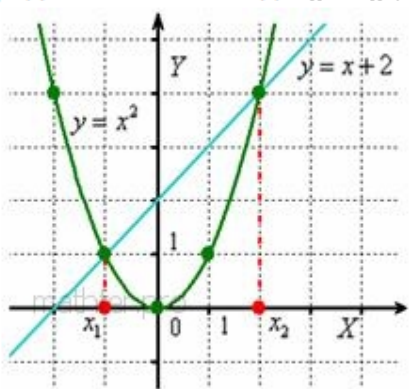
Соответственно, решением неравенства  $x^2 - x - 2 < 0$  является интервал  $x \in (-1; 2)$ .

В случае *нестрогих неравенств*  $x^2 - x - 2 \geq 0$ ,  $x^2 - x - 2 \leq 0$  к решениям нужно добавить пограничные точки:  $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$  и  $x \in [-1; 2]$  соответственно.

А если вам не хочется возиться с нахождением опорных точек, «тыкая в них наугад» (ведь параболы бывают большие, размашистые), то есть общий случай:

Чтобы решить уравнение  $f(x) = g(x)$ , нужно построить графики  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и найти их точки пересечения. «Иксовые» координаты этих точек и будут решениями. Если графики не пересекаются, то действительных решений нет.

Таким образом, вместо решения уравнения  $x^2 - x - 2 = 0$  с вычерчиванием параболы, представим его в виде  $x^2 = x + 2$  и изобразим элементарные графики:



Подчеркиваю ещё раз, что решением являются «иксовые» координаты точек пересечения.

Решением неравенства  $f(x) > g(x)$  являются те промежутки, на которых график  $f(x)$  **выше** графика  $g(x)$ , и, наоборот:  $f(x) < g(x)$  – там, где график  $f(x)$  **ниже** графика  $g(x)$ .

Так, решением неравенства  $x^2 > x + 2$  являются промежутки  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$  – поскольку на них парабола расположена **выше** прямой. И, наоборот,

решением неравенства  $x^2 < x + 2$  является промежуток  $x \in (-1; 2)$ , так как здесь парабола расположена **ниже** прямой. Аналогично для *нестрогих* неравенств.

### Задания для практической работы

#### №1

Решить уравнения функционально – графическим методом:

а)  $x^5 = 3 - 2x$       б)  $5^x = 6 - x$

#### №2

Решить неравенства функционально – графическим методом:

а)  $x^5 > 3 - 2x$       б)  $x^5 \leq 3 - 2x$       в)  $x^{-2} > 2x - 1$       г)  $x^3 \leq \sqrt{x}$

## Практическое занятие №50

### Тема: «Уравнения и неравенства с модулем»

**Цель:** закрепить в ходе выполнения практических заданий алгоритм решения уравнений и неравенств, содержащих модуль, отработать определение модуля, понятие модульного корня.

### Теоретические сведения к практической работе:

#### **УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ**

Чтобы решить уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, надо освободиться от знака модуля, используя его определение:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

На практике это делается так:

1) находят критические точки, т. е. значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2) разбивают область допустимых значений переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

3) на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.

Совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляет все решения рассматриваемого уравнения.

**Пример 1. Решить уравнение:**  $|x + 3| = 2x - 1$

**Решение.** Критическая точка находится после решения уравнения

$$x + 3 = 0, \quad x = -3.$$

1) При  $x < -3$  получаем уравнение  $-x - 3 = 2x - 1$ , откуда  $x = -\frac{2}{3}$ . Но найденное значение не входит в рассматриваемый промежуток.

2) При  $x \geq -3$  получаем уравнение  $x + 3 = 2x - 1$ , откуда  $x = 4$ . Найденное значение входит в рассматриваемый промежуток.

**Ответ.** 4.

**Пример 2. Решить уравнение:**  $|x + 5| - |x - 3| = 8$

Решение. Найдем критические точки:

$$x+5=0 \quad \text{или} \quad x-3=0;$$

$$x=-5 \quad \text{или} \quad x=3.$$

Решаем задачу на каждом промежутке:

1)  $x < -5$ ,  $-x-5-(-x+3)=8$ ,  $-x-5+x-3=8$ ;  $-8=8$  ложно. На рассматриваемом промежутке решений нет.

2)  $-5 \leq x < 3$ ,  $x+5-(-x+3)=8$ ,  $x+5+x-3=8$ ,  $2x=6$ ;  $x=3$  (не входит в рассматриваемый промежуток).

3)  $x \geq 3$ ,  $x+5-(x-3)=8$ ,  $x+5-x+3=8$ ;  $8=8$  верно. Уравнение выполняется при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

Ответ.  $[3; +\infty)$ .

## НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, находится аналогично решению уравнений подобного рода

**Пример 3.** Решить неравенство:  $|x+4| \geq 1$

Решение. Критическая точка находится решением уравнения  $x+4=0$ , откуда  $x=-4$ .

1) Рассмотрим промежуток  $x < -4$ . На нем исходное неравенство принимает вид  $-x-4 \geq 1$ . Решая это неравенство, найдем  $x \leq -5$ . Так как  $x < -4$  и  $x \leq -5$ , то решением исходного неравенства будет промежуток  $x \leq -5$ .

2) Рассмотрим промежуток  $x > -4$ . На нем исходное неравенство имеет вид  $x+4 \geq 1$ , откуда  $x \geq -3$ .

Так как  $x > -4$  и  $x \geq -3$ , то решением исходного неравенства будет промежуток  $x \geq -3$ .

3) Учитывая случаи 1) и 2), окончательно имеем  $x \leq -5$  и  $x \geq -3$ .

Ответ.  $x \leq -5$  и  $x \geq -3$ .

**Пример 4.** Решить неравенство:  $|2x-1| - |x-2| \geq 4$

**Решение.** Критическими точками являются  $x = \frac{1}{2}$  и  $x = 2$ .

1) Рассмотрим промежуток  $x < \frac{1}{2}$ . На нем исходное неравенство имеет вид  $-2x + 1 - (-x + 2) \geq 4$ , откуда  $x \leq -5$ . Следовательно, на этом промежутке решением неравенства будет промежуток  $x \leq -5$ .

2) Рассмотрим промежуток  $\frac{1}{2} \leq x < 2$ . На нем исходное неравенство имеет вид  $(2x - 1) - (-x + 2) \geq 4$ , откуда  $x \geq \frac{7}{3}$ .

Таким образом, исходное неравенство на этом промежутке не имеет решения.

3) Рассмотрим промежуток  $x > 2$ . На нем исходное неравенство имеет вид  $(2x - 1) - (x - 2) \geq 4$ , откуда  $x \geq 3$ .

4) Объединение полученных решений  $x \leq -5$  и  $x \geq 3$  будет решением исходного неравенства.

**Ответ.**  $-\infty < x \leq -5$  и  $3 \leq x < \infty$ .

### **Задания для практической работы:**

Решить уравнения и неравенства с модулем:

1.  $|x - 3| < 2$ .
2.  $|x| + |x + 3| < 5$
3.  $|x - 5| = 3$
4.  $|2x + 1| = x$
5.  $|x + 3| + |2x - 1| = 8$

### **Практическое занятие №51**

#### **Тема: «Уравнения и неравенства с параметрами»**

**Цель:** углубить и расширить знания о способах и методах решения уравнений и неравенств с параметрами.

#### **Теоретические сведения к практической работе:**

Параметр - переменная или постоянная величина в уравнении, неравенстве, системе уравнений и др., которая не рассматривается как искомая, а наоборот, решения отыскиваются в зависимости от этой величины;

- постоянная величина, характеризующая некоторый математический объект;
- вспомогательная переменная величина, от которой зависят другие величины, определяющий математический объект.

Решить уравнение (неравенство) с параметром – значит, для всех допустимых значений параметра найти множество всех решений уравнения (неравенства).



Параметры встречаются при введении некоторых понятий:

- функция, прямая пропорциональность:  $y = kx$ , ( $x$  и  $y$  - переменные,  $k$  – параметр);
- линейная функция:  $y = kx + b$ , ( $x$  и  $y$  – переменные,  $k$  и  $b$  – параметры)
- уравнение первой степени:  $ax + b = 0$ , ( $x$ - переменная,  $a$  и  $b$  – параметры);
- квадратное уравнение;  $ax^2 + bx + c = 0$ , ( $x$  - переменная,  $a, b, c$  - параметры,  $a \neq 0$ ).

Важным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. В решении уравнений с параметром составление ответа – это запись всех полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

### Основные формулы для работы с квадратными уравнениями.

Уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x \in \mathbb{R}$  – неизвестные,  $a, b, c$  – выражения, зависящие только от параметров, причем  $a \neq 0$ , называется квадратным уравнением, а  $D = b^2 - 4ac$  называется дискриминантом квадратного трехчлена.

Если  $D < 0$ , то уравнение не имеет корней.

Если  $D > 0$ , то уравнение имеет два различных корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \text{ и тогда } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Эти корни через коэффициенты уравнения связаны формулами Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

Если  $D = 0$ , то уравнение имеет два совпадающих корня  $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a}$ , и тогда  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ . В этом случае говорят, что уравнение имеет одно решение.

Когда  $b = \text{четное число}$ , т.е.  $b = 2k$ , корни квадратного уравнения определяются по формуле  $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ ,

Для решения приведенного квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$

Используется формула  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ , а также формулы Виета

$$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2) \\ q = x_1 x_2 \end{cases}$$

Допустимыми будем считать только те значения параметров, при которых  $a, b, c$  – действительны.

Пример 1. Решить уравнение  $ax = 1$ .

Решение.

- 1) если  $a \neq 0$ ,  $x = 1/a$ .
- 2) если  $a = 0$ , то данное уравнение не имеет корней.

Ответ: если  $a = 0$ , то нет корней.

если  $a \neq 0$ , то  $x = 1/a$ .

Пример 2. Решить уравнение:  $(a^2 - 1)x = a + 1$ .

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1. Если  $a=1$ , то уравнение принимает вид  $0x = 2$  и не имеет корней;
2. Если  $a = -1$ , то уравнение принимает вид  $0x = 0$ , и тогда  $x$  - любое действительное число;
3. Если  $a \neq 1$  и уравнение имеет единственный корень.

Ответ: если  $a = -1$ , то  $x$  – любое действительное число;  
 если  $a = 1$ , то уравнение не имеет корней;  
 если  $a \neq 1$ , то уравнение имеет единственный корень.

**Пример 3.**  $\frac{x}{a+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3a-4}{(a+1)(x-2)}$

Решение:

При  $a \neq -1$ ,  $x \neq 2$  получаем  $x^2 + 2ax - 3a + 4 = 0$  и корни  
 $x_1 = -a - \sqrt{a^2 + 3a - 4}$ ,  $x_2 = -a + \sqrt{a^2 + 3a - 4}$ , существующие при  
 $a^2 + 2a - 4 \geq 0$ , т.е. при  $\begin{cases} a \leq -4 \\ a \geq 1 \end{cases}$

Теперь проверим, нет ли таких  $a$ , при которых либо  $x_1$ , либо  $x_2$  равен 2. Подставим в квадратное уравнение  $x = 2$ , при этом получим  $a = -8$ .

Второй корень в таком случае равен  $\frac{-3a+4}{2}$  (по теореме Виета) и при  $a = -8$  равен 14.

**Ответ:** при  $a = -8$  единственное решение  $x = 14$ ;

Если  $a \in (-\infty; -8) \cup (-8; -4) \cup (1; +\infty)$  – два корня  $x_1$  и  $x_2$ ;

Если  $a = \{-4; 1\}$  – единственное решение  $x = \{4; -1\}$  соответственно;

Если  $a \in (-4; 1)$ , то  $x \in \emptyset$ .

Иногда уравнения с дробными членами приводятся к квадратным.

**Пример 4.** Решить неравенство  $x^2 + 2x + a > 0$ .

Пусть  $D$  – дискриминант трехчлена  $x^2 + 2x + a > 0$ . При  $D = 0$ , при  $a = 1$ , неравенство примет вид:

$$(x+1)^2 > 0$$

Оно верно при любых действительных значениях  $x$ , кроме  $x = -1$ .

При  $D > 0$ , т.е. при  $x < 1$ , трехчлен  $x^2 + 2x + a$  имеет два корня:  $-1 - \sqrt{1-a}$  и  $-1 + \sqrt{1-a}$  и решением неравенства служит промежуток

$$(-\infty; -1 - \sqrt{1-a}) \cup (-1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$$

Это неравенство легко решить графически. Для этого представим его в виде

$$x^2 + 2x > -a$$

и построим график функции  $y = x^2 + 2x$

Абсциссы точек пересечения этого графика с прямой  $y = -a$  и являются корнями уравнения  $x^2 + 2x = -a$ .

**Ответ:**

при  $-a > -1$ , т.е. при  $a < 1$ ,  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ;

при  $-a = -1$ , т.е. при  $a = 1$ ,  $x$  – любое действительное число, кроме  $-1$ ;

при  $-a < -1$ , т.е. при  $a > 1$ ,  $x$  – любое действительное число.

### **Задания для практической работы:**

Решить уравнения и неравенства с параметром:

1.  $(a^2 - 9)x = a + 3$ ;
2.  $(a^2 - 3a + 2)x = a - 1$ .
3.  $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$
4.  $cx^2 - 2(c-1)x + (c+2) < 0$

### **Практическое занятие №52**

#### **Тема: «Решение текстовых задач профессионального содержания»**

**Цель:** формировать умение решать задачи с профессиональной направленностью, показывая применение математических знаний и методов в выбранной специальности.

#### **Теоретические сведения к практической работе:**

Современный уровень социально-экономического развития страны требует от системы профессионального образования ставить своей главной целью подготовку для общества квалифицированных специалистов, способных работать в опережающем, инновационном режиме, мыслить и действовать нестандартно, принимать оптимальные решения в ситуациях, выходящих за пределы имеющейся информации. Главной задачей профессионального образования становится формирование у выпускника общих и профессиональных компетенций, позволяющих ему овладеть видами деятельности, указанными в ФГОС по избранной специальности или профессии. Задачами профессионально-ориентированного подхода в процессе обучения математике являются:

- показать связь математики с реальной действительностью;
- усилить практическую направленность для качественной подготовки студентов;
- формировать умение организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

#### ***Математические задачи с профессиональной направленностью должны:***

1. Иметь реальное, практическое содержание, раскрывающее практическую ценность и значимость приобретенных математических знаний;
2. Отражать межпредметные связи различных дисциплин общепрофессионального и профессионального циклов на конкретных примерах с практическим содержанием;
3. Отражать производственную ситуацию, показывая применение математических знаний и методов в выбранной специальности;
4. Содержать численные данные, которые соответствуют существующим на практике;
5. Предполагать проведение приближенных вычислений, а также применение вычислительной техники.

#### ***Алгоритм решения задач с профессиональной направленностью:***

### 1. Анализ условия задачи.

Формулировка задачи осуществляется на описательном языке. От правильной постановки задачи, указания ресурсов, которыми мы располагаем, зависит результат ее решения.

### 2. Построение математической модели задачи.

3. Перевод исходной задачи на математический язык: вводятся переменные, ищутся связи между ними и устанавливаются ограничения на них, которые записываются в виде уравнений, неравенств или их систем. Любая математическая задача — модель каких-то прикладных задач (экономических, физических, технических и т.п.).

### 4. Решение математической модели задачи. Изучается полученная модель.

Составляется план решения, если есть необходимость, то целесообразно сделать рисунок. Если задача является типовой, и ее решение определяется в рамках программы учебной дисциплины, то она решается по соответствующему ей алгоритму. Если задача никогда не решалась, то ищется необходимый алгоритм.

### 5. Интерпретация решения.

Это перевод решения задачи на исходный профессиональный язык и конкретизация прикладного смысла ответа задачи.

## Примеры задач профессиональной направленности для специальности

### 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения

**Пример 1.** Функция  $g(t)$  описывает расход газа в зависимости от времени и задается уравнением  $g(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t$ .

а) Найдите производную функции  $g(t)$ .

б) Найдите момент времени, когда расход газа достигает максимального значения.

Решение:

а) Для нахождения производной функции  $g(t)$ , нужно взять производную каждого члена по отдельности. В данном случае, производная функции  $g(t)$  будет равна  $g'(t) = 6t^2 - 10t + 3$ .

б) Чтобы найти момент времени, когда расход газа достигает максимального значения, нужно найти точку экстремума функции  $g(t)$ . Для этого приравняем производную  $g'(t)$  к нулю и решим полученное уравнение:

$$6t^2 - 10t + 3 = 0.$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 100 - 72 = 28 \quad D > 0 \quad t = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{6}$$

Решая это квадратное уравнение, мы найдем два значения  $t$ . Подставим эти значения в исходную функцию  $g(t)$  и найдем соответствующие значения времени, когда расход газа достигает максимального значения.

### Пример 2.

1. Найти объем работы, совершенный газовым монтажником при растяжении газопровода длиной 50 метров и силой растяжения 500 Н. Считайте, что сила растяжения постоянна на всем протяжении газопровода.

Решение:

Для определения работы необходимо найти силу, с которой монтажник будет тянуть газопровод на каждом элементарном участке. Для этого воспользуемся формулой работы: работа равна произведению силы на путь.

Работа = сила \* путь

Работа = сумма (сила на каждом элементарном участке \* длина элементарного участка)

Расстояние = 50 м

Сила растяжения = 500 Н

Делим расстояние на N участков, чтобы найти длину каждого элементарного участка. Чем больше N, тем точнее будет результат.

N = 10 (пусть газопровод разделен на 10 участков)

Длина элементарного участка = расстояние / N = 50 м / 10 = 5 м

Теперь можем найти работу:

Работа = 500 Н \* 5 м + 500 Н \* 5 м + ... + 500 Н \* 5 м (сумма состоит из 10 слагаемых)

Работа = 500 Н \* 5 м \* 10 = 25000 Н\*м = 25 кДж

Ответ: Газовый монтажник совершает работу в 25 кДж при растяжении газопровода длиной 50 метров и силой растяжения 500 Н.

**Пример 3.**

2. Найти объем работы, совершенный газовым монтажником при подключении газового прибора к газопроводу. Известно, что газопроводное давление составляет 3 атмосферы, а объем газового прибора равен  $0.5 \text{ м}^3$ .

Решение:

Чтобы найти работу, совершенную при подключении газового прибора, можно использовать формулу работы: работа равна изменению энергии.

$$\text{Работа} = \Delta E$$

Находим изменение энергии, используя формулу для работы с газом:

$$\Delta E = P * \Delta V$$

Где  $P$  - давление газа,  $\Delta V$  - изменение объема.

$$\text{Давление газа} = 3 \text{ атм}$$

$$\text{Изменение объема} = 0.5 \text{ м}^3$$

$$\text{Работа} = 3 \text{ атм} * 0.5 \text{ м}^3 = 1.5 \text{ атм} * \text{м}^3$$

Ответ: Газовый монтажник совершает работу в объеме  $1.5 \text{ атм} * \text{м}^3$  при подключении газового прибора к газопроводу.

### **Задания для практической работы:**

#### **№1**

Выполнить решение задачи из примера №1, найдя соответствующие значения времени, когда расход газа достигает максимального значения.

#### **№2**

Найти объем работы, совершенный газовым монтажником при растяжении газопровода длиной 75 метров и силой растяжения 470 Н. Считать силу растяжения постоянной на всем протяжении газопровода.

#### **№3**

Найти объем работы, совершенный газовым монтажником при подключении газового прибора к газопроводу. Известно, что газопроводное давление составляет 3,5 атмосферы, а объем газового прибора равен  $0,8 \text{ м}^3$ .

**Примечание:** материал для практических работ №№ 53-55 аналогичен материалу



практической работы №52, задания берутся из открытого банка данных образовательной платформы Юрайт.

### **3.15. Задания для оценки освоения курса учебной дисциплины ОД.03 МАТЕМАТИКА (08.02.08)**

- **Форма/вид промежуточной аттестации**

Формой промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом является: экзамен

- **Форма проведения промежуточной аттестации**

Письменная контрольная работа.

- **Срок проведения**

Дисциплина в соответствии с учебным планом по специальности изучается на протяжении двух семестров. Промежуточная аттестация проводится в конце 2 семестра.

#### **Проверяемые знания и умения:**

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *уметь*:  
У1. Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *знать*:

З1. Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении образовательной программы СПО;

З2. Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

З3. Основные понятия и методы математического анализа;

З4. Основы теории вероятностей и математической статистики;

З5. Основные понятия и методы дискретной математики, линейной алгебры.

#### **Задания для ВГЭ по математике**

##### **Вариант 1**

1. Решить неравенство  $\frac{4x-9x^2}{10-x} \geq 0$

2. Решить уравнение  $\log_5(6 + 5x) = \log_5(2 - x) + 1$

3. Решить уравнение  $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$

4. Решить СЛАУ, используя метод Крамера 
$$\begin{cases} 8x - y = -15 \\ -x + 8y = -6 \end{cases}$$

5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, а вторая 55%. Первая фабрика выпускает 3%

- бракованных стекол, а вторая 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
6. Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной 6 см. Найдите объём и площадь полной поверхности конуса.
7. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:  $z_1 = 3 - 7i$ ,  $z_2 = 2 - i$
8. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением  $v(t) = 3t^2 - 2t - 1$ . Вычислить путь точки за пятую секунду.
9. Решить уравнение  $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$
10. Найти наибольшее значение функции  $y = (3x^2 + 42x - 42) \cdot e^{x+48}$   $x \in [-57; -7]$

### Вариант 2

1. Решить неравенство  $\frac{2x + 8x^2}{2x - 1} \leq 0$
2. Решить уравнение  $\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + 1$
3. Решить уравнение  $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$
4. Решить СЛАУ, используя метод Крамера  $\begin{cases} 10x + 27y = 10 \\ -25x + 12y = -25 \end{cases}$
5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, а вторая 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
6. Образующая конуса равна  $\sqrt{6}$  и составляет с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите объём и площадь полной поверхности конуса.
7. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в



алгебраической форме:  $z_1 = 2 + 6i$ ,  $z_2 = -2 + i$

8. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v(t) = 6t^2 - 4t - 10$ . Вычислить путь точки за четвертую секунду.

9. Решить уравнение  $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$

10. Найти наименьшее значение функции  $y = (3x^2 - 36x + 36) \cdot e^{x-10}$   $x \in [8; 11]$

### Вариант 3

1. Решить неравенство  $\frac{x^2 + x}{x - 3} < 0$

2. Решить уравнение  $\log_5(x + 1) + \log_5(x - 1) = 3\log_5 2$

3. Решить уравнение  $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

4. Решить СЛАУ, используя метод Крамера 
$$\begin{cases} 11x - 5y = 37 \\ 4y - x = 25 \end{cases}$$

5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 47% этих стекол, а вторая 53%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

6. Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной 8 см. Найдите объем и площадь полной поверхности конуса.

7. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:  $z_1 = 3 - 7i$ ,  $z_2 = 2 - i$

8. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v(t) = 3t^2 - 5t + 4$ . Вычислить путь точки за третью секунду.

9. Решить уравнение  $2^{2x+3} - 15 \cdot 2^x - 2 = 0$

10. Найти наибольшее значение функции  $y = (3x^2 + 42x - 42) \cdot e^{x+48}$   $x \in [-57; -7]$

#### Вариант 4

1. Решить неравенство  $\frac{4x-9x^2}{10-x} \geq 0$
2. Решить уравнение  $\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + 1$
3. Решить уравнение  $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$
4. Решить СЛАУ, используя метод Крамера 
$$\begin{cases} 10x + 27y = 10 \\ -25x + 12y = -25 \end{cases}$$
5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, а вторая 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
6. Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной 6 см. Найдите объём и площадь полной поверхности конуса.
7. Найти сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел в алгебраической форме:  $z_1 = 2 + 6i$ ,  $z_2 = -2 + i$
8. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением  $v(t) = 3t^2 - 2t - 1$ . Вычислить путь точки за пятую секунду.
9. Решить уравнение  $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$
10. Найти наименьшее значение функции  $y = (3x^2 - 36x + 36) \cdot e^{x-10}$   $x \in [8; 11]$

#### 4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Критерии оценки экзаменационной работы	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
Отсутствие ошибок в работе, корректность оформления и вычислений. Работа выполнена в полном объеме. Без дополнительных пояснений (указаний) используются навыки и умения. Все материалы оформлены аккуратно и согласно указанным требованиям.	5	отлично
Работа выполнена в полном объеме. Навыки и умения, полученные при изучении дисциплины, не могут быть использованы без дополнительных пояснений. При оформлении работы допущены несущественные ошибки в расчетах (ошибки при округлении чисел и т.п.).	4	хорошо
Работа выполнена в полном объеме, но содержит грубые ошибки, что повлекло неверные вычисления всех других параметров. Навыки и умения, полученные при изучении дисциплины, не могут быть использованы без длительных дополнительных пояснений. Показаны ограниченные знания предмета.	3	удовлетворительно
Работа содержит принципиальные ошибки (перепутаны формулы, нарушена последовательность выполнения вычислений и т.п.). Отсутствуют базовые знания. Работа оформлена крайне небрежно. Показывается полное незнание предмета.	2	неудовлетворительно

**Информационные источники для разработки комплекта КОС**  
**по учебной дисциплине**

**ОД.03 «МАТЕМАТИКА»**

(специальность 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем  
газоснабжения)

**Основные источники:**

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Задачник, издательский центр "Академия", 2021
2. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начало математического анализа. Геометрия. Учебник, издательский центр "Академия", 2021
3. Баврин И.И. «Математический анализ. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2021.
4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике; учебное пособие по математике для средних специальных учебных заведений.- М. Высшая школа, 2021.
5. Ивашев-Мусатов О.С. «Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2021.
6. Каченовский М.И. и др. (под ред.Г.Н. Яковлева) Алгебра (в 2 частях). М.- Наука, 2021
7. Каченовский М.И. и др. (под ред.Г.Н. Яковлева) Геометрия. М.- Наука, 2021
8. Татарников О.В. Элементы линейной алгебры. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2021.
9. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для СПО. М. - Юрайт, 2021.

**Дополнительные источники:**

1. Алимов Ш.А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни).10—11 классы. М., 2022.
2. Башмаков М.И. Математика: кн. для преподавателя: метод, пособие. М., 2022.
3. Башмаков М.И., Цыганов Ш.И. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ. М., 2021
4. Раздаточный материал для работы на уроке по всем темам курса
5. Мультимедийное обеспечение теоретического материала: презентации, электронные плакаты
6. Контролирующие материалы по дисциплине

### **Электронные издания (электронные ресурсы):**

1. Информационный портал Национальная электронная библиотека (Режим доступа): URL: <http://нэб.рф>
2. Информационный портал Электронно-библиотечная система Znanium.com (Режим доступа): URL: <http://znanium.com/>
3. Информационный портал Электронная библиотека Юрайт (Режим доступа): URL: <https://biblio-online.ru/>
4. Информационный портал Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября». (Режим доступа): [URL:http://mat.1september.ru](http://mat.1september.ru) .
5. Информационный портал Математические этюды (Режим доступа): URL: <http://www.etudes>.