

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ТРУБЧЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

Утверждаю  
Директор ГБПОУ «ТПТ»  
\_\_\_\_\_ А.А.  
Ляпкин  
« 30 » мая 2025 г.

**КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

**ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ 23.02.07 ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ И  
РЕМОНТ ДВИГАТЕЛЕЙ, СИСТЕМ И АГРЕГАТОВ АВТОМОБИЛЕЙ**

Рассмотрена и одобрена на заседании  
ц/к профессий и специальностей  
укрупненной группы 23.00.00 Техника  
и технологии наземного транспорта

Протокол №  
от « 30 » мая 2025 г.  
Председатель ц/к \_\_\_\_\_ Шейнова С.Ф.

Трубчевск  
2025

Комплект контрольно-оценочных средств разработан на основе  
Федерального государственного образовательного стандарта по специальности  
среднего профессионального образования 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт  
двигателей, систем и агрегатов автомобилей, утвержденного приказом Министерства  
образования и науки от 9 декабря 2016 года № 1547 (зарегистрирован Министерством  
юстиции Российской Федерации 26 декабря 2016г., регистрационный №44936)

Организация-разработчик:

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
«Трубчевский политехнический техникум»

Разработчик:

Амелькина А.Ф. - преподаватель ГБПОУ «ТПТ»

Ф.И.О., учёная степень, звание, должность

## **СОДЕРЖАНИЕ**

- 1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**
- 2. РЕЗУЛЬТАТЫ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**
- 3. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
- 4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ  
ДИСЦИПЛИНЫ**

# 1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

## *ЕН.01 МАТЕМАТИКА*

### 1.1. Общие положения

Контрольно-оценочные средств разработаны в соответствии с требованиями образовательной программы по специальности 23.02.07 Техническое обслуживание двигателей, агрегатов и систем автомобилей и рабочей программы дисциплины ЕН.01 Математика.

Контрольно-оценочные средства (далее - КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ЕН.01 Математика. КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате оценки осуществляется проверка следующих объектов:

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01-06, ПК 1.1-1.3 ПК 2.1-2.3 ПК 3.1-3.3 ПК 4.1-4.3 ПК 5.1-5.4 ПК 6.1-6.4	Анализировать сложные функции и строить их графики; Выполнять действия над комплексными числами; Вычислять значения геометрических величин; Производить операции над матрицами и определителями; Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; Решать системы линейных уравнений различными методами	Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; Основы интегрального и дифференциального исчисления; Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

### 3. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

#### 3.1. Задания для оценки освоения темы 1.1 «Функция одной независимой переменной и ее характеристики.» (Раздел 1 «Математический анализ»)

##### Практическое занятие №1 «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований»

**Цель:** расширить представление о приемах построения графиков, обобщить все имеющиеся знания об элементарных функциях, их графиках, способах задания, функции, области определения и области значений.

#### **Образовательные результаты, заявленные в ФГОС:**

Студент должен

уметь:

- построить график не только элементарных функций, но и более сложных.
- применять геометрические преобразования при построении графиков функций

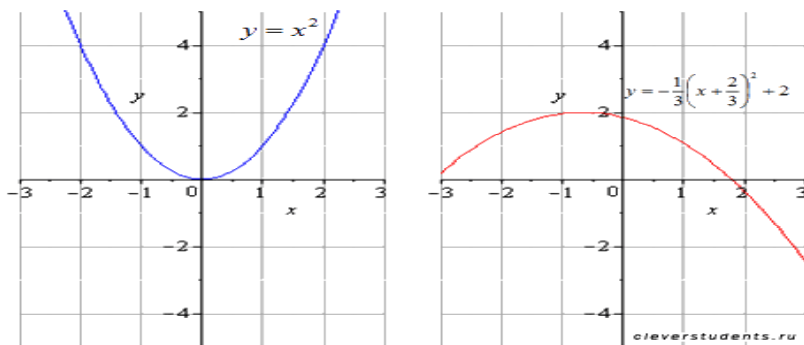
знать:

- понятие числовой функции
- область определения функции,
- область значения функции,
- аргумент функции,
- график функции,
- геометрические преобразования.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

В чистом виде [основные элементарные функции](#) встречаются, к сожалению, не так часто. Гораздо чаще приходится иметь дело с элементарными функциями, полученными из основных элементарных при помощи добавления констант и коэффициентов. Графики таких функций можно строить, применяя геометрические преобразования к графикам соответствующих основных элементарных функций (или переходить к новой системе

координат). К примеру, квадратичная функция  $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 2$  представляет собой квадратичную параболу  $y = x^2$ , сжатую втрое относительно оси ординат, симметрично отображенную относительно оси абсцисс, сдвинутую против направления этой оси на  $2/3$  единицы и сдвинутую по направлению оси ординат на 2 единицы.



Давайте разберемся в этих геометрических преобразованиях графика функции пошагово на конкретных примерах.

С помощью геометрических преобразований графика функции  $f(x)$  может быть построен график любой функции вида  $\pm k_1 \cdot f(\pm k_2 \cdot (x+a)) + b$ , где  $k_1 > 0, k_2 > 0$  - коэффициенты сжатия (при  $0 < k_1 < 1, 0 < k_2 < 1$ ) или растяжения (при  $k_1 > 1, k_2 > 1$ ) вдоль осей  $oy$  и  $ox$  соответственно, знаки «минус» перед коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  указывают на симметричное отображение графика относительно координатных осей,  $a$  и  $b$  определяют сдвиг относительно осей абсцисс и ординат соответственно.

### Геометрические преобразования графика функции:

- Первый вид - масштабирование (сжатие или растяжение) вдоль осей абсцисс и ординат.

На необходимость масштабирования указывают коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  отличные от единицы, если  $0 < k_1 < 1, 0 < k_2 < 1$ , то происходит сжатие графика относительно  $oy$  и растяжение относительно  $ox$ , если  $k_1 > 1, k_2 > 1$ , то производим растяжение вдоль оси ординат и сжатие вдоль оси абсцисс.

- Второй вид - симметричное (зеркальное) отображение относительно координатных осей.

На необходимость этого преобразования указывают знаки «минус» перед коэффициентами  $k_1$  (в этом случае симметрично отображаем график относительно оси  $ox$ ) и  $k_2$  (в этом случае симметрично отображаем график относительно оси  $oy$ ). Если знаков «минус» нет, то этот шаг пропускается.

- Третий вид - параллельный перенос (сдвиг) вдоль осей  $ox$  и  $oy$ .

Это преобразование производится **В ПОСЛЕДНЮЮ ОЧЕРЕДЬ** при наличии коэффициентов  $a$  и  $b$ , отличных от нуля. При положительном  $a$  график сдвигается влево на  $|a|$  единиц, при отрицательных  $a$  – вправо на  $|a|$  единиц. При положительном  $b$  график функции параллельно переносим вверх на  $|b|$  единиц, при отрицательном  $b$  – вниз на  $|b|$  единиц.

### Содержание практической работы

#### I вариант.

1). Постройте графики функций:

а)  $y = (x-4)^2$ . б)  $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ .

2) Пусть дан график функции  $y=f(x)$ . Как получить график функции  $y = f(x+3)-4$ ?

3). Постройте графики функций,

а)  $y = \frac{1}{x+3} - 4$ ; б)  $y = (x+3)^2 - 4$ .

### **II вариант.**

1). Постройте графики функций:

а)  $y = 2(x-1)^2$ , б)  $y = -(x+3)^2$ .

2). Пусть дан график функции  $y=f(x)$ . Как получить график функции  $y = f(x-5)+2$ ?

3) Постройте графики функций:

а)  $y = \frac{1}{x-5} + 2$ ; б)  $y = (x-5)^2 + 2$ .

## **3.2. Задания для оценки освоения темы 1.2 «Предел функции. Непрерывность функций» (Раздел 1 «Математический анализ»)**

### **Практическое занятие №2**

#### **Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов»**

**Цель:** сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

Пусть существует последовательность действительных чисел  $\{a_n \in R : n \geq 1\}$ .

Число  $a$  называется **пределом последовательности**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$

$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Число  $A$  называют **пределом функции  $f(x)$**  при  $x \rightarrow x_0$  (и пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$ , такое, что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

#### **Теоремы о пределах:**

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  ( $c = \text{const}$ ).

2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$ , то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

**Первый замечательный предел:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

**Второй замечательный предел** (число  $e = 2,718\dots$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

**Замечательные пределы:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \log_a e \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Чтобы найти предел элементарной функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , нужно предельное значение

аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если  $x=x_0$  принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке  $x=x_0$ . При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если  $c = \text{const}$ ,  $c \neq 0$ ,  $c \neq \infty$ , то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \rightarrow 0; \quad \frac{c}{0} \rightarrow \infty; \quad \frac{\infty}{c} \rightarrow \infty; \quad c \cdot \infty \rightarrow \infty; \quad c \cdot 0 \rightarrow 0; \quad a^\infty \rightarrow 0, \text{ если } 0 < a < 1; \quad a^\infty \rightarrow \infty, \text{ если } a > 1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left( \frac{\infty}{\infty} \right); \quad \left( \frac{0}{0} \right); \quad (0 \cdot \infty); \quad (\infty - \infty); \quad (1^\infty); \quad (\infty^0); \quad (0^0).$$

## Содержание практической работы

**Задание 1.** Вычислить пределы последовательностей:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1}$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8}$



4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})$

**Задание 2.** Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+4}{x^2+1} \right)^x$

**Задание 3.** Вычислить пределы функций:

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}}{x-5}$

### **3.3. Задания для оценки освоения темы 1.3 «Дифференциальное и интегральное исчисления» (Раздел 1 «Математический анализ»)**

#### **Практическое занятие №3**

#### **Тема: «Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач».**

**Цель:** сформировать умение находить производные элементарных функций, производные сложных функций, применять производную к решению практических задач.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

**Производной функции**  $y = f(x)$  называется конечный предел отношения приращения функции  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  к приращению независимой переменной  $\Delta x$  при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

#### ***Правила дифференцирования***

№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции
<b>I</b>	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	<b>VI</b>	Производная сложной функции $y = f[u(x)], \quad y' = f'_u \cdot u'_x$

<b>II</b>	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	<b>VII</b>	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
<b>III</b>	$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}$		
<b>IV</b>	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$	<b>VIII</b>	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0)$ .
<b>V</b>	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$		

### **Формулы дифференцирования основных элементарных функций**

№ пп	$c = \text{const}, x$ — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
<b>1</b>	$C' = 0$	<b>9</b>	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
<b>2</b>	$x' = 1$	<b>10</b>	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
<b>3</b>	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	<b>11</b>	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
<b>4</b>	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	<b>12</b>	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad  u  < 1$
<b>5</b>	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	<b>13</b>	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad  u  < 1$
<b>6</b>	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$	<b>14</b>	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
<b>7</b>	$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$	<b>15</b>	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
<b>8</b>	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

### **Содержание практической работы:**

#### **Задание 1.**

Найти производные 1-го порядка данных функций:

**1 вар.** а)  $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$ ; б)  $s = (1+t^2)(2-3\operatorname{arctg} t)$ ; в)  $u = \ln^3 \frac{V}{2}$ ; г)  $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$ .

**2 вар.** а)  $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$ ; б)  $s = (4-3\ln t)(5+2\sin t)$ ; в)  $u = \sin^4(2V+3)$ ; г)  $z = \frac{\sin(2-t)}{2 - \ln 3t}$ .

#### **Задание 2.**

Найти производные сложных функций:

<b>Вариант 1</b>	<b>Вариант 2</b>
а) $y = (3x + 1)^4$ ;    б) $y = \sqrt{\ln x + 2}$ ; в) $y = \ln(\cos 4x)$ ;    г) $y = e^{x^2 - 8x + 3} + tg \frac{\pi}{5}$ ; д) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ;    е) $y = \arccos^3 x$ .	а) $y = (1 + 2x)^9$ ;    б) $y = \sqrt{tg x + 2}$ ; в) $y = \ln(x^3 + x)$ ;    г) $y = 7^{\sqrt{x}} + tg 3$ ; д) $y = \frac{1+e^{\cos x}}{1-e^{\cos x}}$ ;    е) $y = \operatorname{arccotg} x^2$ .

### **Задание 3 Вар.1**

Вращение тела вокруг оси совершается по закону  $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ . Найдите угловую скорость  $\omega(t)$  в произвольный момент времени  $t$  и при  $t = 4$  с. ( $\varphi(t)$  — угол в радианах,  $\omega(t)$  — скорость в радианах в секунду,  $t$  — время в секундах.)

### **Вар.2**

Маховик, задерживаемый тормозом, за время  $t$  поворачивается на угол  $\varphi(t) = 4t - 0,3t^2$ . Найдите: а) угловую скорость  $\omega(t)$  вращения маховика в момент времени  $t = 2$  с; б) такой момент времени, когда маховик остановится. ( $\omega(t)$  — угол в радианах,  $t$  — время в секундах.)

## **Практическое занятие №4**

### **Тема: «Нахождение неопределённых интегралов различными методами».**

**Цель:** на конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл непосредственно с помощью таблицы интегралов (непосредственное интегрирование), методом замены переменной (методом подстановки), а также с помощью формулы интегрирования по частям.

### **Теоретические сведения к практической работе**

#### **Метод непосредственного интегрирования**

#### ***Таблица интегралов***

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tg x dx = \ln  \cos x  + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctg x dx = \ln  \sin x  + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x dx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x dx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	
---	--	--

**Пример 1:** Вычислите  $\int \frac{3+2x-x^2}{x} dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2x}{x} dx - \int \frac{x^2}{x} dx = 3 \cdot \int \frac{dx}{x} + 2 \cdot \int dx - \int x dx = 3 \ln x + 2x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

### Метод замены переменной под знаком неопределенного интеграла

Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Применим подстановку  $x = \varphi(t)$ ,

где  $\varphi(t)$  – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда  $f(x) = f[\varphi(t)]$ ,  $dx = \varphi'(t)dt$  и

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (1)$$

Формула (1) называется **формулой замены переменной в неопределенном интеграле**.

**Пример 1:** Вычислить  $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную  $t = 3x-4$ , тогда  $dt = t' \cdot dx = (3x-4)' \cdot dx = 3dx$ , откуда  $dx = \frac{dt}{3}$ . Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения  $3x-4$  подставим  $t$ ,

$$\text{вместо } dx \text{ подставим } \frac{dt}{3}). \quad \int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо  $t$  подставим выражение  $3x-4$ ), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

**Пример 2.** Найдите  $\int (5x^3 - 2)^{10} x^2 dx$ .

Решение. Применим способ подстановки. Пусть  $5x^3 - 2 = t$ , найдем дифференциал:  $(5x^3 - 2)' dx = t' dt$ .  $15x^2 dx = dt$ ,  $x^2 dx = \frac{dt}{15}$ ,

Данный интеграл переписываем следующим образом:

$$\int (5x^3 - 2)^{10} x^2 dx = \int t^{10} \frac{dt}{15} = \frac{1}{15} \int t^{10} dt = \frac{1}{15} \cdot \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{165} t^{11} + C,$$

но  $t = 5x^3 - 2$  следовательно,

$$\int (5x^3 - 2)^{10} x^2 dx = \frac{1}{165} (5x^3 - 2)^{11} + C$$

$$\text{Ответ: } \int (5x^3 - 2)^{10} x^2 dx = \frac{1}{165} (5x^3 - 2)^{11} + C$$

### Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Вычисление интеграла  $\int u dv$  сводится к вычислению интеграла  $\int v du$ , если последний проще исходного.

Для определения метода интегрирования необходимо руководствоваться следующим:

**Применяем метод интегрирования по частям:**

1) если подынтегральная функция задана в виде произведения различных функций (степенной и тригонометрической или в виде произведения многочлена на любую элементарную функции (логарифмическую; тригонометрическую; показательную и т.п.)

2) от логарифмической функции;

3) от обратных тригонометрических функций.

**Содержание практической работы:**

### **№ 1**

Вариант 1		Вариант 2	
«3»	«4-5»	«3»	«4-5»
а) $\int \frac{5dx}{1+x^2}$	а) $\int \frac{3+2x-x^2}{x}$	а) $\int \frac{3dx}{1+x^2}$	а) $\int \frac{x^2-7x+12}{x}$
б) $\int (x^3-3x+\sin x)dx$	б) $\int \frac{5-2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}}$	б) $\int (x^4-2x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}$
в) $\int (2x+1)^4$	в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+e^x}}$	в) $\int (3x-4)^3$	в) $\int \frac{\sin x dx}{2+3\cos x}$
г) $\int \sin 3x dx$	г) $\int \frac{\cos t dt}{\sqrt[3]{1+\sin x}}$	г) $\int \sin 2x dx$	г) $\int \frac{2e^t dt}{(2+e^t)^2}$

### **№2**

1)  $\int x \cdot \cos x dx$ ;

2)  $\int x \cdot \ln x dx$ ;

3)  $\int (2x+1) \sin x dx$

4)  $\int (x+5) \cos x dx$ ;

5)  $\int (x-2) \sin x dx$

6)  $\int (x-4) e^x dx$

### **Практическое занятие №5**

**Тема: «Вычисление определённых интегралов».**

**Цель:** на конкретных примерах научиться находить определенный интеграл различными способами.

**Теоретические сведения к практической работе**

**Метод непосредственного интегрирования**

***Таблица интегралов***

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int \operatorname{tg} x dx = \ln  \cos x  + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln  \sin x  + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	

Пусть требуется вычислить определенный интеграл  $I = \int_b^a f(x) dx$  от непрерывной функции  $f(x)$ . Если будет определена (найдена) первообразная функция  $F(x)$  подынтегральной функции, то величина определенного интеграла вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a)$$

## 1. Непосредственное интегрирование

**Пример 1.** Вычислить  $\int_0^{\pi/2} (2 \cos x - 3 \sin x) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2 \cos x - 3 \sin x) dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx - 3 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [2 \sin x + 3 \cos x]_0^{\pi/2} = \\ &= \left( 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2} \right) - (2 \sin 0 + 3 \cos 0) = 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

## 2. Метод подстановки (замена переменной под знаком определенного интеграла)

**Пример 2.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$ .

Решение.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} = \left( \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; x=0; t = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = \operatorname{tg} 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2) \left( 1 + \frac{2t}{1+t^2} \right)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+2t+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = 2 \int_0^1 (1+t)^{-2} dt = 2 \frac{(1+t)^{-2+1}}{-2+1} \Big|_0^1 =$$

$$= 2 \frac{(1+t)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = -\frac{2}{1+t} \Big|_0^1 = -\left( \frac{2}{2} - \frac{2}{1} \right) = -1 + 2 = 1$$

Ответ. 1.

### Содержание практической работы:

#### № 1

<b>I-вариант</b>	<b>II-вариант</b>
<b>Вычислите интеграл:</b>	<b>1. Вычислите интеграл:</b>
1) $\int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx$ ; 2) $\int_4^9 x^{-\frac{1}{2}} dx$ ; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ ; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-16dx}{\sin^2 x}$ ;	1) $\int_1^3 x^{-2} dx$ ; 2) $\int_0^1 x^4 dx$ ; 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ; 4) $\int_0^{\pi} \frac{-9dx}{\cos^2 x}$ ;
5) $\int_0^4 0,5e^x dx$ .	5) $\int_{-1}^1 2e^x dx$ .
<b>2. Вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями:</b>	<b>2. Вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями:</b>
1) $y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3, \quad y = x$ ;	1) $y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = x^2$ ;
2) $y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = x^3$ .	2) $y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = x^3 +$

#### №2

Вычислить определённые интегралы, используя метод замены переменной и интегрирование по частям:

а)  $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$       б)  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$       в)  $\int_1^e \ln x dx$       г)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

### Практическое занятие №6

**Тема: «Применение определённого интеграла в практических задачах».**

**Цель:** отработать умение вычислять определённые интегралы и применять полученные

компетенции при решении задач прикладного характера.

### Теоретические сведения к практической работе

№ п/п	Физическая величина	Формула	Единицы измерения
1	Путь, пройденный точкой с переменной скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	$t_1, t_2$ – с; $v(t)$ – м/с; $S$ – м.
2	Работа переменной силы $f(x)$ на пути от точки $a$ до точки $b$	$A = \int_a^b f(x) dx$	$f(x)$ – Н; $a; b$ – м; $A$ – Дж.
3	Сила давления жидкости на вертикальную пластину	$P = g \int_a^b p x f(x) dx$	$g = 9,8$ м/с <sup>2</sup> ; $p$ – кг/м <sup>3</sup> ; $a; b$ – м; $p$ – Н.

#### 1. Задача о вычислении пути

**Пример 1.** Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  $v = 2t + 3t^2$  (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \quad (1)$$

Решение:

1.  $t_1 = 0$  с;  $t_2 = 5$  с.

2. По формуле (1) найдем путь, пройденный телом за 5 сек.

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2) dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

Ответ.  $S = 150$  м.

**Пример 2.** Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v_1 = (6t^2 + 2t)$  м/с, второе – со скоростью  $v_2 = (4t + 5)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 = 275 \text{ (м)}$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = 75 \text{ (м)}$$

Таким образом,  $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200 \text{ (м)}$ .

#### 2. Задача о вычислении работы переменной силы.

Работа  $A$  этой силы  $F$  вычисляется по формуле:

$$A = F \cdot s, \quad (2)$$

Где  $S$  – перемещение, м.



Если  $F$  – сила упругости, то по закону Гука

$$F=kx, \quad (2^*)$$

где  $x$  – величина растяжения или сжатия,

$k$  – коэффициент пропорциональности.

Работа переменной силы вычисляется по формуле (4)

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

**Пример.** Сила упругости  $F$  пружины, растянутой на  $l_1 = 0,05$  м, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на  $l_2 = 0,1$  м?

Решение:

1. Определим коэффициент пропорциональности  $k$ .

Подставим формулу (2\*)  $F=3$  Н,  $x = 0,05$  м:

$3=k \cdot 0,05$ , т.е.  $k=60$ , следовательно,  $F=60x=f(x)$ .

2. Подставив  $F=60x$  в формулу (3), найдем значение работы переменной силы, полагая, что  $a=0$ ;  $b=0,1$ :

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3 \text{ Дж}$$

Ответ.  $A = 0,3$  Дж.

### 3. Задача о силе давления жидкости.

Согласно закону Паскаля величина  $P$  давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = gphS, \quad (4)$$

Где  $g$  – ускорение свободного падения в  $\text{м/с}^2$ ;

$\rho$  – плотность жидкости в  $\text{кг/м}^3$ ;

$h$  – глубина погружения площадки в м;

$S$  – площадь площадки в  $\text{м}^2$ ;

Сила давления жидкости на вертикальную пластину вычисляется по формуле (5)

$$P = g \int_a^b \rho x f(x) dx. \quad (5)$$

### **Пример.**

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ ), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой  $0,4 \text{ м} \times 0,7 \text{ м}$ .

Решение:

1. Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому  $f(x)=0,7x$ , где  $x \in [0; 0,4]$ , поэтому пределы интегрирования  $a=0$  и  $b=0,4$ .

2. Для нахождения силы давления воды на стену воспользуемся формулой (5).

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 \cdot 0,7 \cdot x dx = 700 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,4} = 56g \approx 549 \text{ Н}$$

$g=9,8 \text{ м/с}^2$  ускорение свободного падения.

## Содержание практической работы

### Вариант 1 (2).

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  $v=9t^2-2t-8$  (м/с).  
Найти путь, пройденный телом за 3 (4) секунды от начала движения.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v_1=(2t^2+4t)$  м/с, второе – со скоростью  $v_2=(3t+2)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 (12) с?

3. Сила упругости  $F$  пружины, растянутой на  $l_1=0,02$  (0,05)м, равна 2Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на  $l_2=0,05$  (0,1)м?

### 3.4. Задания для оценки освоения темы 2.1 «Матрицы и определители» (Раздел 2 «Основные понятия и методы линейной алгебры»)

#### Практическое занятие №7

#### Тема: «Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы».

**Цель:** проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки, проверить умения нахождения миноров, алгебраических дополнений и определителей, правило вычисления обратной матрицы.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

**Определителем (или детерминантом) второго порядка**, соответствующим данной матрице, называется число  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ .

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению,  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ .

Числа  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  называются элементами определителя.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица размера } 3 \times 3$$

Соответствующим ей **определителем третьего порядка** называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Квадратная матрица  $A$  называется **вырожденной**, если ее **определитель равен нулю**, и **невырожденной**, если ее **определитель не равен нулю**.

Если  $A$  - квадратная матрица, то **обратной** по отношению к  $A$  называется матрица, которая **будучи умноженной, на  $A$  (как справа так и слева), дает единичную**

матрицу. Обозначается  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Если обратная матрица  $A^{-1}$  существует, то матрица  $A$  называется обратимой.

**Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется обращением матрицы.**

**Теорема:** для того чтобы квадратная матрица  $A$  имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица была невырожденной, то есть, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

При условии  $D = |A| \neq 0$  обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы  $A$ ;
2. Находят алгебраические дополнения  $A_{ij}$  всех элементов матрицы  $A$  и записывают новую матрицу;
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу);
4. Умножают полученную матрицу на  $\frac{1}{D}$

**Содержание практической работы**  
**Вариант 1 (1,3) Вариант 2 (2,4).**

1. Вычислить определители:

$$\begin{array}{llll} 1) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} & 2) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} & 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & 4) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \end{array}$$

2. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Найти

а)  $A^{-1}$  и проверить, что  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

б)  $A + A^{-1}$

Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$
<b>1</b>	3	-2	<b>6</b>	1	5
<b>2</b>	4	1	<b>7</b>	-2	3
<b>3</b>	3	-4	<b>8</b>	6	-2
<b>4</b>	2	1	<b>9</b>	-6	1
<b>5</b>	3	-3	<b>10</b>	-5	1

### 3.5. Задания для оценки освоения темы 2.2 «Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)» (Раздел 2 «Основные понятия и методы линейной алгебры»)»

#### Практическое занятие №8

##### Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами».

**Цель:** сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

#### **Теоретические сведения к практической работе**

**Алгоритм метода Гаусса.** Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. **Прямой ход.** Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если  $r(A) = r(A|B)$ , то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. **Обратный ход.** Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

**Теорема Крамера.** Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

Если определитель матрицы системы (\*) отличен от нуля ( $|A| \neq 0$ ), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\dots,n$$

где  $|A|_i$  - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены  $i$ -го столбца на столбец свободных членов.

### **Содержание практической работы**

**Задание 1.** По расширенной матрице выписать СЛАУ.

$$1) (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

$$2) (A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array} \right)$$

$$3) (A|B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$4) (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

**Задание 2.** Решить системы уравнений *методом Крамера и методом Гаусса.*

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

**Задание 3.** Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$$

### 3.6. Задания для оценки освоения темы 3.1 «Множества и отношения» (Раздел 3 «Основы дискретной математики»)

#### Практическое занятие №9

#### Тема: «Выполнение операций над множествами».

**Цель:** закрепить понятие множества, на конкретных примерах научиться применять правила операций над множествами, продолжить формирование умений самостоятельно выполнять операции с множествами.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

Множество – одно из основных понятий математики.

**Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком.** Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множества строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ , то записывают  $x \in X$  ( $\in$  — принадлежит).

Если множество  $A$  является частью множества  $B$ , то записывают  $A \subset B$  ( $\subset$  — содержится).

**Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.**

Два множества  $A$  и  $B$  **равны** ( $A=B$ ), если они состоят из одних и тех же элементов. Например, если  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{3,1,4,2\}$  то  $A=B$ .

**Объединением (суммой)** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B$ , элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если  $A=\{1,2,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ , то  $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

**Пересечением (произведением)** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B$ , элементы которого принадлежат как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ .

Например, если  $A=\{1,2,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,2\}$ , то  $A \cap B = \{2,4\}$

**Разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A/B$ , элементы которого принадлежат множеству  $A$ , но не принадлежат множеству  $B$ .

Например, если  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5\}$ , то  $A/B = \{1,2\}$

**Симметричной разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \Delta B$ , являющееся объединением разностей множеств  $A/B$  и  $B/A$ , то есть  $A \Delta B = (A/B) \cup (B/A)$ .

Например, если  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$ , то  $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

### Свойства:

#### Свойства перестановочности:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

#### Сочетательное свойство:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

**Круги Эйлера (Эйлера-Венна)** — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

### Содержание практической работы:

#### **Задания:**

1. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным:

- а) Интервал  $(-12;13)$  является подмножеством отрезка  $[-13;15]$
- б) Множество действительных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел
- в) Промежуток  $(-14;3]$  является подмножеством отрезка  $[-15;0]$

2. Укажите пару  $(x;y)$ , находящуюся в отношении  $y=x-2$

- а)  $(5;3)$
- б)  $(-3;5)$
- в)  $(3;-5)$

3. Даны множества:  $A=\{5,10,15,20\}$ ,  $B=\{3,6,9,12,15\}$ .

Установите соответствие между следующими множествами А и В

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\{15\}$                  | ? объединение множеств А и В |
| 2. $\{3,5,6,9,10,12,15,20\}$ | ? разность множеств А и В    |
| 3. $\{5,10,20\}$             | ? пересечение множеств А и В |

4. Даны множества: а)  $A=\{e, o, p, x\}$ ,  $B=\{x,y\}$ .

б)  $A=\{12, 13, 14, 15\}$   $B=\{12, 14, 16\}$

Найти множества  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A/B$ ,  $B/A$

5. В трёх восьмых классах 70 ребят. Из них 27 занимаются в шахматном кружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются теннисом. В шахматном кружке 10 ребят из хора, в хоре 6 теннисистов, в шахматном кружке 8 теннисистов; 3 теннисиста посещают и шахматный кружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются теннисом и не занимаются в шахматном кружке? Сколько ребят заняты только теннисом?

### 3.7. Задания для оценки освоения темы 3.2 «Основные понятия теории графов» (Раздел 3 «Основы дискретной математики»)

**Самостоятельная работа по теме:**  
**«Основные понятия теории графов»**

**Ответить на вопросы  
теста:**

1. Граф  $G=(V,E)$  состоит из конечного множества вершин (или узлов)  $V$  и конечного множества ребер  $E$ . Каждое ребро связывает (соединяет) пару вершин. Если ребро  $a$  соединяет вершины  $x$  и  $y$ , то говорят, что ребро  $a$  и вершины  $x, y$ ...

Выберите один правильный ответ

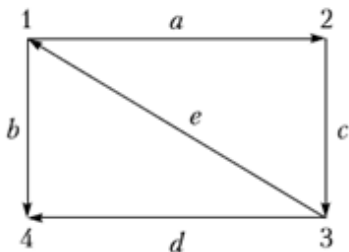
- ☐ подграфы
- ☐ вершины
- ☐ инцидентны
- ☐ петли

2. Два ребра, связывающие одну и ту же пару вершин, называют параллельными (или ); ребро, связывающее вершину саму с собой, называют .

3. Степенью вершины графа называется число  графа, инцидентных этой вершине (петли считаются дважды).

4. Граф, все ребра которого направлены, называют  графом, или орграфом.

5. Как можно назвать представленный на рисунке граф?



Выберите все правильные ответы (один или несколько)

- ☐ Взвешенный граф
- ☐ Обыкновенный граф
- ☐ Нагруженный граф
- ☐ Подграф
- ☐ Орграф

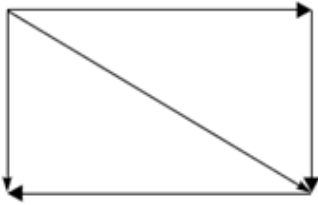
6.  маршрута называется число дуг, которые он содержит.

7. Маршрут называется , если каждая дуга встречается в нем не более одного раза.



8.  называют маршрут, в котором все вершины различны.

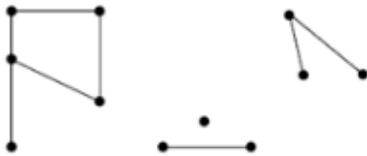
9. Что представлено на рисунке ?



Выберите один правильный ответ

- ☐ Задача о кенигсбергских мостах
- ☐ Граф для иллюстрации матрицы смежности
- ☐ Граф с четырьмя компонентами связности
- ☐ Базисный подграф в ациклическом графе

10. Что представлено на рисунке ?



Выберите один правильный ответ

- ☐ Граф для иллюстрации матрицы смежности
- ☐ Базисный подграф в ациклическом графе
- ☐ Задача о кенигсбергских мостах
- ☐ Граф с четырьмя компонентами связности

Решить задачи с применением базовой теории графов:

### №1

На этой неделе в классе шестеро дежурных: Аня, Вера, Евгений, Данила, Сергей и Фёдор. Рассмотрим следующий граф: дежурные — это вершины графа, две вершины соединены ребром, если соответствующие ребята дружат между собой. Получившийся граф изображён ниже.



Сколько рёбер в этом графе?

С какими дежурными дружит Евгений?

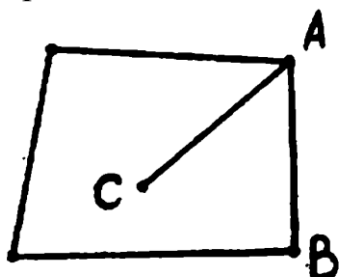
### №2

*Утверждение.* Количество рёбер в графе равно половине суммы степеней всех его вершин.

В графе 7 вершин, степени которых равны 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Сколько рёбер в этом графе?

№3

Определите степени вершин данного графа:



### 3.8. Задания для оценки освоения Раздела 4 «Элементы теории комплексных чисел»

#### Практическое занятие №10

##### Тема: «Комплексные числа и действия над ними».

**Цель:** отработать навыки перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно, закрепить полученные теоретические знания и практические умения студентов по выполнению действий над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

#### **Теоретические сведения к практической работе**

Запись комплексного числа в виде  $z = a + bi$ , называется алгебраической формой комплексного числа. Часто бывает удобна тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – модуль, а  $\varphi = \arg z$  – аргумент комплексного числа.

Пусть по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r \cos \varphi, \\ b = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Отсюда получается

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Такая форма называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к

тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

### Пример 1

Записать число  $z = 1 - \sqrt{3}i$  в тригонометрической форме.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2}, \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$z = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

### Задания для практической работы

#### 1. Представьте в тригонометрической форме:

$$\text{а) } Z = 3 + 2i \quad \text{б) } Z = 5 - 4i$$

#### 2. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме: Вычислить:

$$1) z_1 z_2; \quad 2) \frac{z_1}{z_2};$$

$$1. z_1 = 1 + i, z_2 = -\sqrt{3} + i;$$

$$2. z_1 = 1 - i, z_2 = -\sqrt{3} - i;$$

$$3. z_1 = -1 + i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$4. z_1 = -1 - i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$5. z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$$

$$6. z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 2 + 2i;$$

$$7. z_1 = -1 + \sqrt{3}i, z_2 = -2 - 2i;$$

$$8. z_1 = -1 - \sqrt{3}i, z_2 = -2 + 2i;$$

$$9. z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$10. z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

### 3.9. Задания для оценки освоения темы 5.1 «Вероятность. Теорема сложения вероятностей» (Раздел 5 «Основы теории вероятностей и математической статистики»)

### Практическое занятие №11

#### Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события»

**Цель:** сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

#### Теоретические сведения к практической работе

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью  $P(A)$  события  $A$  в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , к числу всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию  $A$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $P(A)$ , называемое вероятностью события  $A$ .

Если события  $A_1, A_2 \dots$  попарно несовместны, то  $P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю  $P=0$ .

Вероятность достоверного события равна единице  $P=1$ .

Вероятность произвольного случайного события  $A$  заключается между 0 и 1:  $0 < P(A) < 1$ .

События  $A$  и  $B$  называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения:  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых:  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ .

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:  $P(AB) = P(A) \cdot P(A/B)$  или  $P(BA) = P(A) \cdot P(B/A)$

Вероятность произведения двух независимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятностей сомножителей:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

*Полная вероятность. Формула Байеса*

Если событие  $A$  может произойти только при выполнении одного из событий  $H_1, H_2, \dots$ , которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события  $A$  вычисляется по формуле

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) + \dots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и  $p(A) \neq 0$ , то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(A)}$$

*Формула Бернулли*

- 1) Вероятность того, что событие А наступит ровно  $m$  раз при проведении  $n$  независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли  $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n$
- 2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении  $n$  независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна  $P_n(m \geq 1) = 1 - q^n, q = 1 - p$
- 3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении  $n$  независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее  $m_1$  и не более  $m_2$  раз вычисляется по формуле  $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(m)$
- 4) Наивероятнейшее значение  $m_0$  числа наступления события А при проведении  $n$  повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле 
$$\begin{aligned} np - q &\leq m_0 \leq np + p \\ np - (1 - p) &\leq m_0 \leq np + p \end{aligned}$$

### **Задания для практической работы**

1. В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

2. Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

3. Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

4. В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

5. В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

6. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

7. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

8. Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

9. Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

10.

Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

### **3.10. Задания для оценки освоения темы 5.2 «Случайная величина, ее функция распределения» (Раздел 5 «Основы теории вероятностей и математической статистики»)**

#### **Практическое занятие №12**

##### **Тема: «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами»**

**Цель:** в ходе решения практических задач закрепить понятия дискретной случайной величины, математического ожидания (среднего значения) дискретной случайной величины, дисперсии, а также среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины.

##### **Теоретические сведения к практической работе**

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются *дискретными*. *Математическим ожиданием (средним значением)* дискретной случайной величины  $X$  называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности  $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

*Дисперсией* дискретной случайной величины  $X$  называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания  $D(X) = M(X - M(X))^2$ . Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

*Средним квадратичным отклонением* дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

**Пример 1:** Случайная величина  $X$  задана таблицей распределения вероятностей. Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

$x_i$	2	5	8	9
$p_i$	0,1	0,4	0,3	0,2

*Решение:*

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

### Задания для практической работы

#### № 1

Найти дисперсию выборки:

- 1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;  
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

#### № 2

Найти дисперсию совокупности значений случайной величины  $X$ , заданной частотным распределением:

1) 

$X$	2	3	4	6
$M$	3	2	2	3

2) 

$X$	-1	2	3	4	5
$M$	3	1	2	3	1

#### № 3

Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:

- 1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

#### № 4

Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:

- 1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;  
2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

#### № 5

Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения:

- 1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9;  
2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

#### № 6



Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

### № 7

Двух футболистов, один из которых участвовал в пяти игровых сезонах, а другой — в шести (см. таблицу), сравнить по стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых 1-м футболистом	17	21	20	16	15	19
Число голов, забитых 2-м футболистом	—	17	20	18	21	14

### 3.11. Задания для оценки освоения темы 5.3 «Математическое ожидание и дисперсия случайной величины» (Раздел 5 «Основы теории вероятностей и математической статистики»)

Самостоятельная работа по теме:

«Характеристики случайной величины»

#### Задание 1.

Найти дисперсию выборки:

- 1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;  
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

#### Задание 2.

Найти дисперсию совокупности значений случайной величины  $X$ , заданной частотным распределением:

1)

$X$	2	3	4	6
$M$	3	2	2	3

2)

$X$	-1	2	3	4	5
$M$	3	1	2	3	1

#### Задание 3.



Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:

1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

**Задание 4.** Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:

1)  $-5, -15, 12, -7, 8, 13, -1, -7$ ;

2)  $16, -2, -8, 10, 14, -6, -2, 11$ .

**Задание 5.**

Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины  $X$ , распределение которых по частотам  $M$  задано таблицей:

1)

$X$	-1	0	1	3	5	6
$M$	2	3	4	1	1	1

2)

$X$	-2	-1	0	2	3	4
$M$	1	2	4	4	1	1

### **3.12. Задания для оценки освоения курса учебной дисциплины ЕН.01 МАТЕМАТИКА (23.02.07)**

- **Форма/вид промежуточной аттестации**

Формой промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом является: дифференцированный зачет

- **Форма проведения промежуточной аттестации**

Письменная контрольная работа.

- **Срок проведения**

Дисциплина в соответствии с учебным планом по специальности изучается на протяжении одного семестра. Промежуточная аттестация проводится в конце семестра.

**Проверяемые знания и умения:**

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *уметь*:

У1. Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *знать*:

31. Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении образовательной программы СПО;

32. Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

33. Основные понятия и методы математического анализа;

34. Основы теории вероятностей и математической статистики;

35. Основные понятия и методы дискретной математики, линейной алгебры.

**ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА**  
**(дифференцированный зачет)**

**Вариант 1**

1. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$
2. Найдите производную функции  $y = (3x + 1)^4$
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, вычислите определённый интеграл:

$$\int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx$$

4. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x} dx$$

5. Вычислить определитель: 
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

6. Решить уравнение:  $x^2 - 6x + 18 = 0$

7. Найти дисперсию выборки: 10 см, 12 см, 7 см, 11 см

**Вариант 2**

1. Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$
2. Найдите производную функции  $y = (1 + 2x)^9$
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, вычислите определённый интеграл:

$$\int_1^3 x^{-2} dx$$

4. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 7x + 12}{x} dx$$

5. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

6. Решить уравнение:  $x^2 - 2x + 10 = 0$

7. Найти дисперсию выборки: 16 г, 14 г, 13 г, 17 г

**8.**

#### 4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Критерии оценки дифференцированного зачета	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
Отсутствие ошибок в работе, корректность оформления и вычислений. Работа выполнена в полном объеме. Без дополнительных пояснений (указаний) используются навыки и умения. Все материалы оформлены аккуратно и согласно указанным требованиям. Даются грамотные ответы на поставленные вопросы.	5	отлично
Работа выполнена в полном объеме. Навыки и умения, полученные при изучении дисциплины, не могут быть использованы без дополнительных пояснений. При оформлении работы допущены несущественные ошибки в расчетах (ошибки при округлении чисел и т.п.).	4	хорошо
Работа выполнена в полном объеме, но содержит грубые ошибки, что повлекло неверные вычисления всех других параметров. Навыки и умения, полученные при изучении дисциплины, не могут быть использованы без длительных дополнительных пояснений. Показаны ограниченные знания предмета при ответе на вопросы.	3	удовлетворительно
Работа содержит принципиальные ошибки (перепутаны формулы, нарушена последовательность выполнения вычислений и т.п.). Отсутствуют базовые школьные знания. Работа оформлена крайне небрежно. Показывается незнание предмета при ответе на вопросы.	2	неудовлетворительно

**Информационные источники для разработки комплекта КОС**

**по учебной дисциплине**  
**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

(специальность 23.02.07 Техническое обслуживание двигателей, агрегатов и систем автомобилей)

**Основные источники**

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Задачник, издательский центр "Академия", 2022
2. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начало математического анализа. Геометрия. Учебник, издательский центр "Академия", 2022
3. Баврин И.И. «Математический анализ. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2022.
4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике; учебное пособие по математике для средних специальных учебных заведений.- М. Высшая школа, 2022.
5. Ивашев-Мусатов О.С. «Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2022.
6. Каченовский М.И. и др. (под ред.Г.Н. Яковлева) Алгебра (в 2 частях). М.- Наука, 2022
7. Каченовский М.И. и др. (под ред.Г.Н. Яковлева) Геометрия. М.- Наука, 2022
8. Татарников О.В. Элементы линейной алгебры. Учебник и практикум для СПО. М. - Юрайт, 2022.
9. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для СПО. М. - Юрайт, 2022.

**Дополнительные источники**

1. Алимов Ш.А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни).10—11 классы. М., 2023.
2. Башмаков М.И. Математика: кн. для преподавателя: метод, пособие. М., 2023.
3. Башмаков М.И., Цыганов Ш.И. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ. М., 2023

**Электронные издания (электронные ресурсы)**

1. Информационный портал Национальная электронная библиотека (Режим доступа): URL: <http://нэб.рф>
2. Информационный портал Электронно-библиотечная система Znanium.com (Режим доступа): URL: <http://znanium.com/>
3. Информационный портал Электронная библиотека Юрайт (Режим доступа): URL: <https://biblio-online.ru/>
4. Информационный портал Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября». (Режим доступа): URL:<http://mat.1september.ru> .
5. Информационный портал Математические этюды (Режим доступа): URL: <http://www.etudes>.

